

Алгоритмы быстрого умножения чисел

Карякина А.И.

Математика

4 класс, МАОУ СОШ № 22, г. Тюмень, Тюменской области

Научный руководитель: Извина О.А., МАОУ СОШ № 22, г. Тюмень, Тюменской области

Введение

Каждый школьник должен уметь вычислять без помощи калькулятора. Этот навык нужен при ответе у доски, на контрольных, олимпиадах, при сдаче ОГЭ и ЕГЭ, везде, где требуется выполнить вычисления за ограниченное время.

Цель исследования

Цель работы состоит в изучении методов быстрого счета.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

1. Изучить литературу по теме исследования.
2. Выяснить, что необходимо знать и уметь, для освоения приемов быстрого счета.
3. Познакомиться с техниками быстрого счета.
4. Научиться применять техники быстрого счета, адаптировать их под свои потребности.

Предметом исследования являются алгоритмы быстрых вычислений.

Была выдвинута гипотеза, заключающаяся в том, что владение приемами и алгоритмами быстрого счета позволяет увеличить скорость вычислений.

Материал и методы исследования

В работе были использованы следующие методы исследования:

- анализ,
- обобщение,
- доказательство.

В качестве источников информации были использованы приемы счета Якова Исидоровича Перельмана [1], Якова Георгиевича Трахтенберга [2], Георгия Николаевича Бермана [3].

Мозг и тренинг счета

Умение быстро считать помогает быстро обрабатывать и анализировать информацию [4]. Мозг работает путём передачи сигналов по нейронным сетям. Эти сложные нейронные связи лежат в основе функционирования мозга и составляют основу интеллекта человека [5].

Регулярный тренинг счета стимулирует нейронные пути и улучшает концентрацию внимания [6]. Доказано, что тренировка счета повышает активность головного мозга, развивая при этом память и мышление [7].

Чтобы быстро считать, нужно научиться без затруднений выполнять сложение и вычитание в пределах 20, знать таблицу умножения. Для запоминания таблицы умножения и сложения удобно использовать приемы мнемотехники [8].

Тренировка с использованием числовых таблиц Шульте, повышает способность формирования навыка быстрого счета [4].

Для формирования навыка счета хорошо работает упражнение по устному построению арифметической прогрессии. Облегчает вычисления и, следовательно, увеличивает скорость счета навык выявления закономерностей, умение группировать слагаемые и множители, раскрывать скобки, выносить множитель и делитель за скобку [9].

Любые упражнения, направленные на устный счет больших чисел, являются отличной зарядкой для ума [3].

Алгоритмы быстрого умножения чисел

На первый взгляд, применение методик быстрых вычислений похоже на демонстрацию фокусов [10]. Изучая разные способы быстрого счета, хотелось понять каким образом получают эти алгоритмы. Некоторые способы, например, умножение на 11, легко понять, рассмотрев умножение в столбик. Для

понимания других способов быстрых вычислений потребовались доказательства.

1. Умножение чисел с равным количеством десятков

Рассмотрим умножение чисел, имеющих одинаковое количество десятков.

$$\overline{ab} \cdot \overline{ac} \quad (1)$$

Имеем

$$\begin{aligned} (10a + b) \cdot (10a + c) &= 10a \cdot 10a + 10a \cdot b + 10a \cdot c + b \cdot c = \\ &= (10a + b + c) \cdot 10a + b \cdot c \end{aligned} \quad (2)$$

Получаем правило.

Правило 1. *Чтобы перемножить два числа с равным количеством десятков, необходимо сумму одного множителя и единиц другого множителя умножить на произведение 10 и количества десятков, затем прибавить произведение единиц множителей.*

Примеры:

$$13 \cdot 18 = (13 + 8) \cdot 10 + 3 \cdot 8 = 210 + 24 = 234,$$

$$21 \cdot 24 = (21 + 4) \cdot 20 + 1 \cdot 4 = 500 + 4 = 504,$$

$$106 \cdot 103 = (106 + 3) \cdot 100 + 6 \cdot 3 = 10900 + 18 = 10918.$$

Этот прием наиболее эффективен при вычислении квадратов чисел в пределах 20.

Например,

$$16 \cdot 16 = (16 + 6) \cdot 10 + 6 \cdot 6 = 22 \cdot 10 + 36 = 220 + 36 = 256.$$

Заметим, что формула (2) упростится, если сумма единиц множителей равна 10.

Рассмотрим $\overline{ab} \cdot \overline{ac}$, где $b + c = 10$. Из (2) получим

$$\begin{aligned} \overline{ab} \cdot \overline{ac} &= (10a + b + c) \cdot 10a + b \cdot c = (10a + 10) \cdot 10a + b \cdot c = \\ &= 10(a + 1) \cdot 10a + b \cdot c = a \cdot (a + 1) \cdot 100 + b \cdot c \end{aligned} \quad (3)$$

Следствие 1. *Чтобы найти произведение чисел с равными количеством десятков и с суммой единиц равной 10, нужно перемножить количество десятков на количество десятков, увеличенное на 1, и приписать произведение единиц.*

Пример 1. Вычислить произведение чисел 63 и 67.

Вычисляем

$$6 \cdot 7 = 42.$$

Приписываем $21 = 3 \cdot 7$, получаем

$$63 \cdot 67 = 4221.$$

Пример 2. Вычислить произведение чисел 123 и 127.

По Правилу 1 вычисляем

$$12 \cdot 13 = (12 + 3) \cdot 10 + 2 \cdot 3 = 150 + 6 = 156.$$

Приписываем $21 = 3 \cdot 7$, ответ

$$123 \cdot 127 = 15621.$$

Следствием Правила 1 является известный способ вычисления квадратов чисел, которые оканчиваются на «5».

Из (3) имеем

$$\overline{a5} \cdot \overline{a5} = a \cdot (a + 1) \cdot 100 + 25 \quad (4)$$

Следствие 2. Чтобы возвести в квадрат число, которое оканчивается на 5, нужно перемножить количество десятков на количество десятков, увеличенное на 1, и приписать 25.

Пример 3. Вычислить квадрат числа 85.

Применим Следствие 1. Сначала вычисляем

$$8 \cdot 9 = 72.$$

Приписываем 25, получаем

$$85 \cdot 85 = 7225.$$

Пример 4. Вычислить квадрат числа 175.

Применим Следствие 1. Сначала по Правилу 1 вычислим

$$17 \cdot 18 = (17 + 8) \cdot 10 + 7 \cdot 8 = 250 + 56 = 306.$$

Приписываем 25, получаем

$$175 \cdot 175 = 30625.$$

Следствие 2 является частным случаем Следствия 1.

Отметим, что при a , не равном 1, 2, 10, 20 и т.д. применение Правила 1 требует напряжения, и скорость вычислений в сравнении с умножением в столбик не возрастает.

2. Умножение чисел с равными опорными числами

Остановимся далее на случаях, которые дают наибольшее упрощение счета. Назовем круглое число опорным для множителя, если множитель отличается от опорного меньше чем на 10. Правило 1 соответствует случаю, когда оба множителя больше опорного числа.

Рассмотрим случай, когда оба множителя меньше опорного.

Аналогично (2) получим

$$\begin{aligned} (10a - b) \cdot (10a - c) &= 10a \cdot 10a - 10a \cdot b - 10a \cdot c + b \cdot c = \\ &= (10a - b - c) \cdot 10a + b \cdot c \end{aligned} \quad (5)$$

Получаем

Правило 2. Для нахождения произведения двух множителей с равными опорными числами и не превышающих опорное число, следует из одного множителя вычесть величину недостающих единиц до опорного числа другого множителя, результат умножить на опорное число и прибавить произведение недостающих до опорного числа единиц множителей.

Пример 5. Вычислить $46 \cdot 43$.

Здесь опорное число 50. Вычисления будут несложными, поскольку для умножения на 50 достаточно умножить на 100 и поделить на 2.

$$46 \cdot 43 = (46 - 7) \cdot 50 + 4 \cdot 7 = 39 \cdot 100 : 2 + 28 = 1950 + 28 = 9108.$$

Отметим также, что, Правило 2 существенно упрощает вычисления, если опорное число равно 100, 1000, ...

Пример 6. Вычислить $92 \cdot 97$.

Здесь опорное число 100. По Правилу 2, получим

$$92 \cdot 97 = (92 - 3) \cdot 100 + 8 \cdot 3 = 8900 + 24 = 8924$$

Остался случай, когда один множитель больше опорного числа, а другой - меньше. Для определенности будем считать, что первый множитель больше, а второй меньше. Аналогично (2), получим

$$\begin{aligned} (10a + b) \cdot (10a - c) &= 10a \cdot 10a + 10a \cdot b - 10a \cdot c - b \cdot c = \\ &= (10a + b - c) \cdot 10a - b \cdot c \end{aligned} \quad (6)$$

Правило 3. *Чтобы перемножить два множителя с равными опорными числами, причем один множитель больше опорного, а другой - меньше, необходимо сумму меньшего множителя и количество единиц большего множителя (или сумму большего множителя и количество единиц меньшего множителя) умножить на опорное число и вычесть произведение единиц большего множителя и количество недостающих единиц до опорного числа меньшего множителя.*

Пример 7. Вычислить $93 \cdot 108$.

$$93 \cdot 108 = (93 + 8) \cdot 100 - 8 \cdot 7 = 10100 - 56 = 10044$$

Заметим, если в (6) $b=c$, то формула примет вид

$$(10a + b) \cdot (10a - b) = 10a \cdot 10a - b \cdot b \quad (7)$$

Таким образом, вычисления упрощаются в случае, если один множитель больше опорного на столько же, на сколько другой множитель меньше опорного.

Из (7) получим.

Следствие 3. Чтобы найти произведение чисел, одно из которых больше опорного на величину a , на которую второй множитель меньше опорного числа, нужно из квадрата опорного числа вычесть квадрат величины a .

Пример 10. Вычислить $48 \cdot 52$.

$$48 \cdot 52 = (50 - 2) \cdot (50 + 2) = 2500 - 4 = 2496$$

Итак, выведены формулы и сформулированы правила, позволяющие, в некоторых случаях, существенно упростить и ускорить нахождение произведения многозначных чисел.

Результаты

Вычислительный навык – один из основных при формировании знаний по математике. В процессе работы получено представление о разных способах вычислений. Выполнен обзор доступных упражнений и простых методик, позволяющих быстрее вычислять как письменно, так и устно.

Приведены доказательства и сформулированы правила, позволяющие умножать многозначные числа с равными опорными числами. Сформулированы и доказаны следствия, которые позволяют быстро находить произведение множителей, отличающихся от опорного числа на одинаковую величину, умножать числа с равным количеством десятков и с суммой единиц равной 10, быстро вычислять квадраты чисел в пределах 20 и чисел, которые оканчиваются на 5.

Создан видео контент в виде видеороликов, предназначенных и рассчитанных прежде всего на сверстников.

В этих роликах рассматриваются вычислительные лайфхаки [1-3], демонстрируется применение сформулированных и доказанных в работе правил и следствий.

К каждому ролику разработаны и прикреплены тренировочные задания, с помощью которых можно освоить рассмотренные в работе приемы вычислений.

Заключение

В процессе выполнения работы пришло понимание, что использование традиционных универсальных методов вычислений никак не отменяется вычислительными методиками быстрого счета, поскольку эти правила нужно, во-первых, запомнить, во-вторых, правильно применить.

При выполнении работы, приходилось много считать и анализировать, подбирать примеры и тренировочные задания, контролировать время вычислений. Это стало хорошей тренировкой счета. Собственная скорость вычислений заметно возросла. К примеру, время выполнения страницы школьного тренажера по математике уменьшилось примерно в два раза.

В результате выполнения поставленных задач исследования, цель изучения методов быстрого счета достигнута. При этом, была подтверждена гипотеза о том, что владение алгоритмами и вычислительными навыками позволяет увеличить скорость вычислений.

Список литературы

1. Перельман, Я. И. Занимательная алгебра. Живая математика / Я. И. Перельман. — Екатеринбург: Тезис, 1994. — 360 с.
2. Катлер Энн, Мак-Шейн Рудольф - Система быстрого счета по Трахтенбергу. - М: Советские учебники, 2024. – 136 с.
3. Берман Г. Н. Приемы счета / [под ред. А. Л. Брудно]. — 6-е изд. — М.: Физматгиз, 1959. — 88 с.
4. Васильева Е. Е., Васильев В. Ю. Суперпамять для всех. — М.: Аст, 2006. — 71 с.
5. Черниговская Т. В. Языки сознания: кто читает тексты нейронной сети? // Человек в мире знания: в честь 80-летия акад. В.А. Лекторского. Российская политическая энциклопедия, 2012.
6. Дубынин В.А. Мозг и его потребности. От питания до признания. - М.: Альпина нон-фикшн, 2021. – 572 с.
7. Ягодкин Н. А. Энциклопедия детской мотивации / Н.А. Ягодкин, Г.В. Годун,; А.Н. Згода, И.Г. Чередов. Под ред. А.Н. Згоды. – 1-е изд. – СПб.: Любавич, 2019. – 312 с.
8. Карякина А.И. Применение мнемотехники в начальной школе // Международный школьный научный вестник. – 2024. - № 3. – URL: <https://school-herald.ru/article/view?id=1610> (дата обращения: 30.11.2024)
9. Татарченко Т.Д. Способы быстрого счета на занятиях кружка //Математика в школе, № 7, 2008. – URL: http://www.schoolpress.ru/products/rubria/index.php?ID=35196&SECTION_ID=42 (дата обращения: 30.11.2024)
10. Арутюнян Е, Левитас Г. Занимательная математика. -М.: АСТ-пресс, 1999. – 368 с.