

# **Разработка программы для компьютерного моделирования структуры белых карликов**

**Пикулева А.**

астрономия, информатика, физика

*студент 2 курса, Московский областной медицинский колледж № 1, г. Ногинск  
Московской области*

*Научный руководитель: Туманов В.Е., преподаватель физики, кандидат  
химических наук, Московский областной медицинский колледж № 1, г. Ногинск  
Московской области*

Цель настоящего исследования – разработать компьютерную программу для изучения структуры белых карликов. Под структурой белого карлика далее будем понимать профиль плотности вещества внутри звезды и ее радиус.

Задачами исследования являются: изучить теоретический материал для моделирования структуры белых карликов; разработать компьютерную программу для моделирования структуры белых карликов на языке программирования Паскаль.

В статье представлена программа для расчета структуры белых карликов. Приведен текст программы для решения поставленной задачи.

При использовании программы работы обучающиеся могут рассчитать структуру звезды при различных начальных условиях.

Эта работа способствует междисциплинарным связям предметов, изучаемых на предметах естественнонаучного цикла среднего профессионального образования.

Ключевые слова: белые карлики, модель белого карлика, расчет структуры звезды, компьютерная программа.

## **Введение**

Физические явления, которые изучаются в курсе астрономии, практически экспериментально не воспроизводимы. Компьютерное моделирование важным инструментом в изучении курса физики и астрономии [1]. Математическая

модель физического явления является путем к пониманию различных вариантов физического взаимодействия объектов в реальном мире.

Наблюдения астрономов показывают, что в ходе эволюции звёзд происходит процесс угасания звезды. Под воздействием сил гравитации нагретый газ красных гигантов и сверхгигантов разлетается по Вселенной, образуя молодую планетарную туманность. Через сотни тысяч лет туманность рассеивается, а на её месте остаётся вырожденное ядро красного гиганта белого цвета – белый карлик. При небольших размерах остывание небесного светила происходит очень медленно. Такая судьба ожидает и звезду нашей планетарной системы – Солнце.

С этой точки зрения изучение структуры белых карликов является актуальной познавательной задачей при изучении темы «Строение и эволюция Вселенной», тема «Эволюция звезд» в курсе астрономии.

Цель настоящего исследования – разработать компьютерную программу для изучения структуры белых карликов. Под структурой белого карлика далее будем понимать профиль плотности вещества внутри звезды и ее радиус.

Задачами исследования являются:

- Изучить теоретический материал для моделирования структуры белых карликов;
- Разработать компьютерную программу для моделирования структуры белых карликов на языке программирования Паскаль.

Гипотеза исследования. Экспериментальная возможность для изучения структуры белых карликов отсутствует. Анализ учебной литературы показывает, что поставленная цель может быть достигнута путем разработки компьютерной программы, реализующей одну из моделей для определения структуры белых карликов на основе известных законов физики.

Объектом исследования является структура белых карликов.

Предметом исследования является зависимость между массой звезды и ее радиусом — величину, которую можно определить из астрономических наблюдений.

## Основная часть

**Теоретическая часть.** Изложению рассматриваемой темы посвящено много учебной литературы [2,3].

Белые карлики — это холодные звездные объекты, состоящие в основном из тяжелых ядер и электронов. Звезды такого типа являются одним из возможных конечных результатов течения обычных ядерных процессов, в ходе которых синтезируются элементы путем связывания нуклонов в ядра.

Предположения и допущения модели:

1. Звезда сферически-симметрична (т.е. состояние в ее любой точке зависит только от расстояния между этой точкой и центром звезды).
2. Вращение у звезды отсутствует.
3. Можно пренебречь влиянием магнитного поля.
4. Звезда находится в механическом (гидростатическом) равновесии.
5. Вещество внутри звезды рассматриваем как вырожденный газ []. Давление внутри звезды является функцией плотности (уравнение состояния).

## Белые карлики. Физика

— это звезды, масса которых примерно равна массе Солнца, радиус — порядка 5000 км. а средняя плотность — около  $10^6$  г/см<sup>3</sup>. Эти звезды уже сожгли свое ядерное горючее и медленно охлаждаются, теряя остатки своей тепловой энергии.

В белых карликах гравитации противостоит давление вырожденных электронов. Давление, которое удерживает эти звезды от гравитационного коллапса равно давлению вырожденных электронов.

1930г. Чандрасекар сделал важное открытие, что масса белых карликов не может превышать максимального значения около 1,4 массы Солнца. Точная величина последнего зависит от химического состава звезды.

Рисунок 1. Физика белых карликов.

При выполнении условия гидростатического равновесия гравитационная сила, приложенная к некоторому объему вещества, уравновешивается перепадом давления  $P$ . Сила, связанная с перепадом давления и действующая на единицу объема, равна  $-\frac{\Delta P}{\Delta r}$ .

Сила тяжести, действующая на единичный объем вещества на расстоянии  $r$  от центра, равна

$$F_{gr} = -\frac{Gm}{r^2} \rho$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $\rho(r)$  — массовая плотность, а  $m(r)$  — масса звезды, заключенная внутри сферы радиуса  $r$ :

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(s) s^2 ds$$

Когда звезда находится в равновесии, результирующая этих сил (гравитации и давления), приложенная к любому пробному объему вещества, должна быть равна нулю:

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = - \frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r)$$

Это уравнение можно переписать в виде []:

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta r} = - \left[ \frac{\Delta P}{\Delta \rho} \right]^{-1} \frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r)$$

Изменение массы вдоль радиуса следует из соотношения между массой и плотностью:

$$\frac{\Delta m}{\Delta r} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

В результате получена система уравнений в конечных разностях, которые определяют структуру звезды.

Чтобы описание системы было полным, необходимо знать уравнение состояния вещества, связывающее его плотность с величиной давления, необходимого для поддержания этой плотности.

$$\frac{\Delta P}{\Delta \rho} = Y_e \frac{m_e}{M_p} \gamma \left( (\rho / \rho_0)^{\frac{1}{3}} \right)$$

$$\gamma(x) = \frac{x^2}{3(1+x^2)^{1/2}}$$

где  $Y_e$  — среднее число электронов, приходящихся на одно ядро,  $M_p$  и  $m_e$  — масса протона и электрона соответственно,  $\rho_0 = 9.79 \cdot 10^5 Y_e^{-1} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ .

Начальные условия задаются в виде

$$\text{плотность в центре } \rho(0) = \rho_c, \text{ масса в центре } m(0) = 0.$$

Решение полученной системы по  $r$  в направлении от центра дает профиль плотности вещества внутри звезды и ее радиус  $R$  (плотность стремится к нулю). Масса звезды определяется как  $M=M(R)$ . Поскольку  $M$  и  $R$  зависят от  $\rho_c$ , то,

изменяя этот параметр, можно изучать структуру звезд разной массы, вычисляя кривую  $R=R(\rho_c)$ ,  $M=M(\rho_c)$ ,  $\rho_c \in [\rho_A, \rho_B]$  в координатах  $(R, M)$ .

Таким образом поставленная цель может быть достигнута.

**Программа для решения задачи.** Преобразуем систему к безразмерной форме [4]. Введем безразмерные переменные для радиуса, плотности и массы:  $r = R_0 x$ ,  $\rho = \rho_0 y_1$ ,  $m = M_0 y_2$ , где  $R_0 = 7.72 \cdot 108 Y_e$  см,  $M_0 = 5.67 \cdot 1033 Y_e^2$  г.

Безразмерные уравнения запишутся в виде

$$\frac{dy_1}{dx} = - \frac{y_1 y_2}{\gamma (y_1^{\frac{1}{3}}) x^2}$$
$$\frac{dy_2}{dx} = y_1 x^2$$
$$y_1(0) = \rho_c, y_2(0) = 0$$

Ниже приведен листинг программы, реализующий данный алгоритм.

### Листинг программы.

```
{ Структура белых карликов }
program wkmy;

Var
ro0:double; {начальная плотность в безразмерных координатах}
Ye, R, M, Ro:double;
{}
Var
y:array[1..2] of double;
x, eps, h: double;
n:integer;

{функции правой части}

function fgam(x1:double):double;
var
temp0:double;
begin
temp0:=x1**0.333333;
fgam:=x1*x1/sqrt(1+x1*x1)/3;
end;

{текущие значения правой части}

function fun(j:integer;x1:double;y1:double;y2:double):double;
var templ:double;
begin
if j=1 then
begin
templ:=x1*x1;
templ:=y1*y2/templ;
fun:=-templ/fgam(y1);
```

```

end;
if j=2 then fun:=x1*x1*y1;
end;

Procedure rukutm;
var w,k1,k2,k3,k4:array[1..2] of double;
var j:integer;
begin
  { writeln(fun(1,x,y[1],y[2]),' ',fun(1,x,y[1],y[2]));}
for j:=1 to n do w[j]:=y[j];
for j:=1 to n do k1[j]:=h*fun(j,x,w[1],w[2]);
for j:=1 to n do y[j]:=w[j]+1/2*k1[j];
for j:=1 to n do k2[j]:=h*fun(j,x+1/2*h,w[1],w[2]);
for j:=1 to n do y[j]:=w[j]+1/2*k2[j];
for j:=1 to n do k3[j]:=h*fun(j,x+1/2*h,w[1],w[2]);
for j:=1 to n do y[j]:=w[j]+k3[j];
for j:=1 to n do k4[j]:=h*fun(j,x+h,w[1],w[2]);
for j:=1 to n do y[j]:=w[j]+(k1[j]+2*k2[j]+2*k3[j]+k4[j])/6;

x:=x+2*h;

end;

begin
  ro0:=1;
  n:=2;
  eps:=5e-2;
  h:=0.01;
  y[1]:=ro0;
  y[2]:=0;
  x:=0.1;

writeln(' x y1 y2');
while eps<=y[1] do
{while x<=3 do}
begin
writeln(x:15:8,y[1]:15:8,y[2]:15:8);
rukutm;
end;

Writeln;
Writeln('Параметры белого карлика');
Ye:=26/56; {железо, 1/2 - углерод}
Ro:=9.79*10e5/Ye;
Ro:=Ro*y[1];
Writeln('Плотность в центре: ',Ro, ' г/см^3');
M:=5.67*10e33*Ye*Ye;
M:=M*y[2];
Writeln('Масса звезды: ',M, ' г');
R:=7.72*10e8*Ye;
R:=R*x;
Writeln('Радиус звезды: ',R, ' см');
end.

```

## Результаты и обсуждение

Результат работы программы для  $\rho_c = 1$  приведен ниже.

x	y1	y2
0.10000000	1.00000000	0.00000000
0.12000000	1.00000000	0.00011033
0.14000000	0.99969993	0.00026667

0.16000000	0.99916126	0.00047694
0.18000000	0.99841765	0.00074904
0.20000000	0.99748917	0.00109083
0.22000000	0.99638865	0.00151011
0.24000000	0.99512476	0.00201462
.....		
3.66000000	0.09418865	2.51282955
3.68000000	0.09138326	2.52548119
3.70000000	0.08862698	2.53789034
3.72000000	0.08591943	2.55005619
3.74000000	0.08326025	2.56197806
3.76000000	0.08064908	2.57365534
3.78000000	0.07808554	2.58508753
3.80000000	0.07556927	2.59627425
3.82000000	0.07309989	2.60721519
3.84000000	0.07067704	2.61791017
3.86000000	0.06830032	2.62835909
3.88000000	0.06596937	2.63856195
3.90000000	0.06368380	2.64851886
3.92000000	0.06144325	2.65823002
3.94000000	0.05924733	2.66769574
3.96000000	0.05709566	2.67691643
3.98000000	0.05498787	2.68589257
4.00000000	0.05292359	2.69462477
4.02000000	0.05090243	2.70311373

Параметры белого карлика  
 Плотность в центре: 1031619.76482127 г/см<sup>3</sup>  
 Масса звезды: 3.31391164660365E+34 г  
 Радиус звезды: 14480514285.7143 см

Для некоторых случаев уравнения состояния рассматриваемая система имеет аналитическое решение (вырожденный электронный газ в релятивистском приближении) [3]:

$$y_1 = \rho_c \frac{\sin 0.5x}{0.5x}$$

При  $\rho_c = 1$  значение функции  $y_1$  будет равно 0 при  $x = 2\pi$ , что подтверждает выполнение программы, как показано ниже

x	y1	y2
0.10000000	1.00000000	0.00000000
0.12000000	1.00000000	0.00011033
0.14000000	0.99992927	0.00026667
0.16000000	0.99980229	0.00047699
0.18000000	0.99962693	0.00074926
.....		
6.08000000	0.03479487	12.70208708
6.10000000	0.03136440	12.71497066
6.12000000	0.02795291	12.72666050
6.14000000	0.02456054	12.73714721
6.16000000	0.02118745	12.74642152
6.18000000	0.01783376	12.75447428
6.20000000	0.01449962	12.76129645
6.22000000	0.01118517	12.76687910
6.24000000	0.00789055	12.77121343
6.26000000	0.00461588	12.77429074



6.28000000 0.00136130 12.77610249

Параметры белого карлика

Плотность в центре:  $-39495.6798266984 \text{ г/см}^3$

Масса звезды:  $1.56160203476767\text{E}+35 \text{ г}$

Радиус звезды:  $22580999999.9998 \text{ см}$

Использование настоящей программы позволяет строить профили плотности вещества внутри звезды и ее радиуса при различных начальных условиях.

### **Выводы**

В статье представлена физическая модель белых карликов и предложена программа моделирования их структуры. Приведен текст программы для решения поставленной задачи.

При использовании предлагаемой программы обучающиеся могут произвести расчет профиля плотности вещества внутри звезды и ее радиуса при различных начальных условиях.

Работа способствует междисциплинарным связям предметов, изучаемых на предметах естественнонаучного цикла среднего профессионального образования.

### **Литература**

1. Сауров Ю. А. Модели и моделирование в методике обучения физике: логико-методологические поиски: монография. Киров: Радуга-ПРЕСС, 2016. - 216 с.
2. Даутов Р. З. Практикум по методам решения задачи Коши для систем ОДУ. Учебное-методическое пособие. Казань: изд-во Казанского университета, 2010. - 89 с.
3. Кунин С. Вычислительная физика. М.: Мир, 1992. - 418 с.