НЕСТАНДАРТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Караева Д.А.

г. Владикавказ, МБОУ СОШ №30, учитель математики,

Почетный работник общего образования РФ

Великий математик Карл Фридрих Гаусс, в свое время, назвал математику «царицей всех наук». Математика скорее добрая фея, только получить у нее можно не волшебную палочку, а надежный и точный инструмент – математические методы.

И.Г. Петровский

Реализация концепции математического образования Российской Федерации, утвержденной приказом Минобразования России от 24.12.2013 г. № 2506-р, направлена на более эффективную подготовку выпускников школы к освоению программ высшего профессионального образования.

В связи с чем, мы посчитали необходимым рассмотреть использование некоторых свойств функций (область определения, ограниченность, монотонность) при решении нестандартных неравенств, как один из эффективных методов подготовки будущих абитуриентов.

Пример 1. (Демовариант ЕГЭ-2015, задание 17)

Решите неравенство:

$$\frac{\log_9(2-x)-\log_{15}(2-x)}{\log_{15}x-\log_{25}x}\le\log_{25}9.$$

Решение

1. ОДЗ: $2-x>0;\quad x>0;\quad x\neq1.$

$$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

2. а) При $0 < x < 1$ имеем

$\log_{15} x \vee \log_{25} x$	$\log_9(2-x) \vee \log_{15}(2-x)$
$\dfrac{1}{\log_x 15} \vee \dfrac{1}{\log_x 25}$	$\dfrac{1}{\log_{2-x} 9} \vee \dfrac{1}{\log_{2-x} 15}$
$\log_x 15 \wedge \log_x 25$	$\log_{2-x} 9 \wedge \log_{2-x} 15$
$(0 < x < 1, \quad 15 < 25)$	$(0 < x < 1, \qquad 9 < 15;$
$\log_x 15 > \log_x 25$	$0 > -x > -1; \qquad y = \log_\alpha t \ (t > 0).$
$\wedge \sim >; \quad \vee \sim <.$	$2 > 2 - x > 1; \qquad$ возр. ф.)
$\underline{\log_{15} x < \log_{25} x}.$	$\underline{2 - x > 1;}$
	$\log_{2-x} 9 < \log_{2-x} 15$
	$\wedge \sim <; \quad \vee \sim >.$
	$\underline{\log_9(2-x) > \log_{15}(2-x)}.$

$\log_{25} 9 = \log_{5^2} 3^2 = \log_5 3; \quad \log_5 3 > \log_5 1; \quad \underline{\log_{25} 9 > 0}.$

Левая часть неравенства отрицательна, правая часть неравенства положительна; (0; 1) – множество решений.

б) При $1 < x < 2$ имеем

$\log_{15} x > \log_{25} x; \qquad \log_9(2-x) < \log_{15}(2-x);$

левая часть неравенства отрицательна, $\log_{25} 9 > 0;$ (1; 2) – множество решений неравенства.

в) $(0;1) \cup (1;2)$ - множество всех решений данного неравенства.

Ответ: (0; 1); (1; 2).

Пример 2 (Пробник 2015, задание 17)

Решите неравенство $\dfrac{6}{2x+1} > \dfrac{1+\log_2(2+x)}{x}$.

Решение.

1. ОДЗ: $\begin{cases} 2x+1 \neq 0, \\ x \neq 0, \\ 2+x > 0. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \neq -\dfrac{1}{2}, \\ x \neq 0, \\ x > -2. \end{cases}$ $\quad x \in \left(-2; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right) \cup (0; +\infty).$

2. а) При $x > 0$ имеем

   умножим обе части неравенства на x

(*) $1+\log_2(2+x) < \dfrac{6x}{2x+1}$; где $\dfrac{6x}{2x+1} = 3 - \dfrac{3}{2x+1}$.

Правая часть неравенства (*) строго меньше 3 при $x > 0$.

Пусть $f(x) = 1+\log_2(x+2)$; $\quad g(x) = 3 - \dfrac{3}{2x+1}$.

Функции f и g – возрастающие функции.

Если $0 < x \leq 1$, то

$\begin{cases} g(x) \leq g(1) = 2; \\ f(x) \geq 2. \end{cases}$ значит, неравенство $f(x) < g(x)$ не имеет решений.

Если $1 < x \leq 2$, то

$\begin{cases} f(x) \geq f(1) = 1+\log_2 3; \\ g(x) \leq g(2) = \dfrac{12}{5}, \end{cases}$

где $1+\log_2 3 > \dfrac{12}{5}$.

Значит, неравенство $f < g$ не имеет решений.

$1+\log_2 3 \vee \dfrac{12}{5}$

$\log_2 3 \vee \dfrac{72}{5}$

$3 \vee 2^{\frac{7}{5}}$

$3^5 \vee 2^7$

$343 > 128$

$\wedge \sim >$

Если $x > 2$, то

$\begin{cases} f(x) > f(2) = 3; \\ g(x) < 3. \end{cases}$ значит, неравенство $f(x) < g(x)$ не имеет решений.

б) При $-\dfrac{1}{2} < x < 0$ имеем

умножаем обе части на $x\left(-\dfrac{1}{2} < x < 0\right)$, получаем равносильное неравенство

$1 + \log_2(x+2) > \dfrac{6x}{2x+1}$.

$x > -\dfrac{1}{2}$

$x + 2 > 1\dfrac{1}{2}$

$\log_2(x+2) > \log_2 1\dfrac{1}{2} > \log_2 1 = 0$;

$1 + \log_2(x+2) > 0$; $\quad f(x) > 0$;

$f(x) > g(x)$; верно при любом

$x \in \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

$\dfrac{6x}{2x+1} = 3 - \dfrac{3}{2x+1}$;

$-\dfrac{1}{2} < x < 0$; $\qquad -1 < 2x < 0$;

$0 < 2x + 1 < 1$;

$\dfrac{3}{2x+1} > 3$; $\qquad -\dfrac{3}{2x+1} > -3$;

$3 - \dfrac{3}{2x+1} < 0$;

$g(x) < 0$.

в) При $-2 < x < -\dfrac{1}{2}$ имеем

$\begin{cases} f(x) < f(-\frac{1}{2}) < 2; \\ g(x) > 3. \end{cases}$

Значит, неравенство $f(x) > g(x)$ не имеет решений.

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

Таким образом, для обеспечения устойчивого повышения уровня успеваемости учащихся необходимо обратить внимание, прежде всего, на развитие таких структур интеллекта, как математическая интуиция, формально-логическое мышление, оперативная логическая память.

Одним из путей формирования УУД может стать включение таких заданий в содержание обучения математике (например, в рамках элективного курса).

Литература

1. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни // С.М. Никольский – 10-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 430 с.
2. В.В. Ткачук. Математика – абитуриенту. – 15-е изд., – М.: МЦНМО, 2008. – 1024 с.
3. Сергеев И.Н., Панферов В.С. ЕГЭ-2014. Математика. Задача С3. Уравнения и неравенства/Под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 72 с.

.