

Анализ типичных ошибок в решении уравнений, предлагаемых в контрольно-измерительных материалах ОГЭ. Задание №20.

Математика

Выполнила: Беляева Евгения Романовна, учащаяся 9б класса, МБОУ ШР «СОШ №2», город Шелехов.

Руководитель: Барановская Ольга Леонидовна, учитель математики, МБОУ ШР «СОШ №2», город Шелехов.

Введение

Структура Контрольно-измерительных материалов ОГЭ отвечает цели построения системы дифференцированного обучения математике в современной школе. Дифференциация обучения направлена на решение двух задач: формирования у всех обучающихся базовой математической подготовки, составляющей функциональную основу общего образования, и одновременного создания условий, способствующих получению частью обучающихся подготовки повышенного уровня, достаточной для активного использования математики во время дальнейшего обучения, прежде всего при изучении её в средней школе на профильном уровне.

Чтобы быть зачисленным в профильный 10 класс на базе нашего учебного учреждения, необходимо сдать успешно экзамены по итогу 9-го класса. Успешно для меня – это значит на «отлично». Критерии оценивания экзамена по математике таковы: чтобы получить отметку «отлично», необходимо набрать минимум 22 балла. Это становится возможным лишь тогда, когда выпускник приступает к решению заданий с развёрнутым ответом с №20 - №25.

Со слов сверстников, я знаю, что не все педагоги, работающие в общеобразовательных школах, рассматривают с обучающимися задания повышенного уровня сложности, анализ типичных ошибок, которые допускают выпускники прошлых лет.

Мой вклад в решение данного проблемного вопроса заключается в том, что я предлагаю своим ровесникам, на основании моей работы, рассмотреть

типичные ошибки выпускников, и самостоятельно закрепить материал, подготовиться к экзамену с помощью предложенных заданий. Мной были проанализированы КИМы с 2016-2019 годы.

Обзор литературы

Вопрос типичных ошибок, которые допускают выпускники, в тех или иных заданиях, особенно 2 части, рассматривается педагогами на совещаниях по итогам ГИА. Я не нашла ни одной исследовательской работы по данному направлению, которая была бы предложена учащимися. В основном данный проблемный вопрос представлен в виде педагогических статей.

По рекомендации своего руководителя основным источником исследования стали «Методические рекомендации результатов государственной итоговой аттестации в форме основного государственного экзамена по математике в Иркутской области», которые издаются Государственным автономным учреждением дополнительного профессионального образования Иркутской области «Институт развития образования Иркутской области».

Цель

Анализ типичных ошибок выпускников в решении задания №20 (2 часть) по теме «Уравнения».

Методы исследования

- 1.Поисковый.
2. Анализ, синтез (отбор необходимой информации, обобщение)
- 3.Практический

Результаты исследования

Спецификация контрольно измерительных материалов ОГЭ по математике.

Я рассмотрела спецификацию контрольных измерительных материалов для проведения ОГЭ. И сделала вывод, что задание №20 проверяет умение учащегося выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения. Задание №20 относится к повышенному уровню сложности и

оценивается на 2 балла. Задания, оцениваемые в 2 балла, считаются выполненными верно, если обучающийся выбрал правильный путь решения, из письменной записи решения понятен ход его рассуждений, получен верный ответ. В этом случае ему выставляется полный балл, соответствующий данному заданию. Если в решении допущена ошибка, не имеющая принципиального характера и не влияющая на общую правильность хода решения, то участнику выставляется 1 балл.

Задание №20 подразделяется на:

- алгебраические выражения;
- уравнения;**
- неравенства;
- системы неравенств;
- системы уравнений.

На данном этапе мной рассмотрены и представлены в работе:

Уравнения:

- Иррациональные.
- Дробно-рациональные.
- Уравнения, приводимые к квадратным.
- Применение свойств при решении уравнений.

Таблица 1

Основная статистика по выполнению задания №20 учащимися 9-х классов Иркутской области.

№ задания	Содержание задания	Процент участников, набравших максимальный балл по заданию			
		2016	2017	2018	2019
21 *	Решить уравнение или систему уравнений	6,4	21,1	10,6	14,8

*До 2020 года задание №20 значилось под №21. Изменения произошли в контрольно-измерительных материалах в 2020-2021 учебном году.

Приведённая статистика говорит о том, что в среднем лишь 13% выпускников справляются с заданием №20. [3:19]

Содержание задания №20 по годам. Типичные ошибки выпускников.

2016 год

Решите уравнение:

$$(x^2 - 16)^2 + (x^2 - x - 12)^2 = 0$$

Поскольку приём использования в решении уравнений свойств отрабатывается в школе редко, с заданием справились лишь 6,4% учащихся Иркутской области.

2017 год

Решите уравнение:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 10 = 0$$

Типичные ошибки выпускников:

1. Вычислительные ошибки
2. Ошибки в формуле нахождения корней квадратного уравнения
3. Распространённая ошибка в представлении ответа. Множество из двух корней уравнения описывалось как упорядоченная пара $\left(\frac{1}{5}; -\frac{1}{2}\right)$, что является ошибкой в математической символике
4. Обучающиеся записывали корни в виде десятичных дробей и отбрасывали из ответа те из них, которые имели ненулевой период.

О критериях оценивания:

Решение, в котором была допущена вычислительная ошибка, но с ее учетом доведенное до конца, оценивалось в 1 балл.

Подчеркну, что ошибка в формуле нахождения корней квадратного уравнения не является вычислительной, и за ее допущение ставится 0 баллов.

Правильное решение с ошибкой в форме представления ответа – 1 балл.

Появление лишних корней в ответе в результате логической (не вычислительной) ошибки – 0 баллов. [1:15]

2018 год

Решите уравнение:

$$x^2 - 2x + \sqrt{5-x} = \sqrt{5-x} + 24$$

Типичные ошибки выпускников:

1) Основные ошибки в решении задачи 21 связаны с областью допустимых значений переменной, входящей в уравнение. Ошибка, как правило, заключалась либо в неэквивалентном преобразовании уравнения, произведенном без учета ограничения на область допустимых значений переменной, либо в неправильном определении (возможно, *описании*) области допустимых значений. Ошибки такого рода не относятся к вычислительным. Решение в таком случае оценивается в 0 баллов.

2) Вычислительные ошибки.

О критериях оценивания:

Решение, в котором была допущена вычислительная ошибка, но с ее учетом доведенное до конца, оценивалось в 1 балл.

Подчеркну, что ошибка в определении области допустимых значений переменной не является вычислительной и за ее допущение ставится 0 баллов.

Появление лишних корней в ответе в результате логической (не вычислительной) ошибки – 0 баллов. [2:15]

Рисунок 1

№ 21

$$x^2 - 2x + \sqrt{5-x} = \sqrt{5-x} + 24$$
$$x^2 - 2x + \sqrt{5-x} - \sqrt{5-x} - 24 = 0$$
$$x^2 - 2x - 24 = 0$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -24 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

ОДЗ: $5-x \geq 0$
 $x \leq 5$

$x_1 = 6$ - не подходит по ОДЗ

Ответ: -4 .

Оценка эксперта: 2 балла

Вывод: данное уравнение решено верно. Обучающийся получил максимальное количество баллов.

$$\begin{aligned}
 21 \quad x^2 - 2x + \sqrt{5-x} &= \sqrt{5-x} + 24 \\
 x^2 - 2x + \sqrt{5-x} - \sqrt{5-x} - 24 &= 0 \\
 x^2 - 2x - 24 &= 0 \\
 D &= 4 - 4(-24) = 100 \\
 \frac{2 \pm 10}{2} &= 6; -4
 \end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = 6$; $x_2 = -4$

Вывод: в данном примере решения уравнения учащийся не определил ОДЗ и не учёл его при ответе. Оценка эксперта 0 баллов.

$$\begin{aligned}
 21. \quad x^2 - 2x + \sqrt{5-x} &= \sqrt{5-x} + 24 \\
 x^2 - 2x + \sqrt{5-x} - \sqrt{5-x} - 24 &= 0 \quad \text{ОДЗ: } \boxed{x \leq 5} \\
 x^2 - 2x - 24 &= 0 \\
 D &= 4 + 96 = 100 \quad \sqrt{100} = 10 \\
 x_1 &= \frac{2+10}{2} = 6 \quad \text{не проходит по ОДЗ.} \\
 x_2 &= \frac{2-10}{2} = -4
 \end{aligned}$$

Ответ: $x = -4$

Вывод: здесь учащимся определена область допустимых значений, но неправильно: упущен случай равенства 5. Оценка эксперта 0 баллов.

2019 год

Решите уравнение:

$$(x-2)^4 - (x-2)^2 - 6 = 0$$

Типичные ошибки выпускников:

1. Вычислительные ошибки
2. Второй класс ошибок касается применения метода введения вспомогательной неизвестной при решении уравнения. [3:20]

$$21. (x-2)^4 - (x-2)^2 - 6 = 0$$

Решить $(x-2)^2 = t \geq 0$, тогда $(x-2)^4 = t^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t^2 - t - 6 = 0$$

$$a=1 \quad D=b^2-4ac=$$

$$b=-1 \quad = 1+24=25$$

$$c=-6 \quad \sqrt{D}=\sqrt{25}=5$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = -2 < 0 \text{ не подходит} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 3$$

$$\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{3}$$

$$|x-2| = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x-2 = \sqrt{3} \\ x-2 = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} + 2 \\ x = -\sqrt{3} + 2 \end{cases}$$

Ответ: $x = \sqrt{3} + 2, x = -\sqrt{3} + 2$

Оценка эксперта: 2 балла.

Вывод: уравнение выпускником решено верно. Оценка эксперта 2 балла.

Банк заданий №20

Тщательно разобравшись в решении новых для меня уравнений, сделал анализ типичных ошибок выпускников, предлагаю небольшой банк заданий, который поможет моим сверстникам отработать задание №20.

Иррациональные уравнения (2019 год)

Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8$

Решение:

Поскольку подкоренное выражение не может быть меньше нуля, по свойству арифметического корня, область допустимых значений ограничивается выражением $x \leq 3$ значит,

$$x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8$$

$$\text{ОДЗ: } x \leq 3$$

при уничтожении корней получаем:

$$x^2 - 2x = 8$$

$x^2 - 2x - 8 = 0$ решаем квадратное уравнение и получаем корни:

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 4.$$

Решением искомого уравнения является только $x = -2$, так как $x = 4$ не входит в область допустимых значений.

Ответ: $x = -2$.

Решите уравнения самостоятельно:

- a) $x^2 - 3x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 40$ (Ответ: $x = -5$);
b) $x^2 - 2x + \sqrt{5-x} = \sqrt{5-x} + 24$ (Ответ: $x = -4$);
c) $x^2 + 3x + \sqrt{3+x} = \sqrt{3+x} + 4$ (Ответ: $x = 1$);
d) $x^2 + 2x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 48$ (Ответ: $x_1 = -8; x = 6$).

Применение свойств при решении уравнений (2016 год)

Решите уравнение: $(x^2 - 25)^2 + (x^2 + 3x - 10)^2 = 0$.

Решение:

Квадрат любого числа неотрицателен. Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю, только если они оба равны нулю. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 25 = 0 \\ x^2 + 3x - 10 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = -5; x_2 = 5 \\ x_1 = -5; x_2 = 2 \end{cases}$$

Так как системе удовлетворяет только $x = -5$, он и будет являться ответом.

Ответ: $x = -5$.

Решите уравнения самостоятельно:

- a) $(x^2 - 9)^2 + (x^2 + x - 6)^2 = 0$ (Ответ: $x = -3$);
b) $(x^2 - 4)^2 + (x^2 - 3x - 10)^2 = 0$ (Ответ: $x = -2$);
c) $(x^2 - 49)^2 + (x^2 + 4x - 21)^2 = 0$ (Ответ: $x = -7$);
d) $(x^2 - 16)^2 + (x^2 + x - 12)^2 = 0$ (Ответ: $x = -4$).

Дробно-рациональные уравнения (2017 год)

Решите уравнение: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 12 = 0$

Решение:

Так как на ноль делить нельзя, обозначаем область допустимых значений $x \neq 0$ и решаем:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 12 = 0$$

ОДЗ: $x \neq 0$

$$1 + x - 12x^2 = 0$$

$$12x^2 - x - 1 = 0$$

Решением через дискриминант получаем:

$$x_1 = -0.25$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

Сверим корни с ОДЗ, не входят. Соответственно в ответе записываем оба корня.

Ответ: $x_1 = -0.25$; $x_2 = \frac{1}{3}$.

Второй способ: замена переменной

$$\frac{1}{x} = t$$

$t^2 + t - 12 = 0$, отсюда имеем, $t = 3$ и $t = -4$, а значит ответ: $x_1 = -0.25$; $x_2 = \frac{1}{3}$.

Второй способ решения был предложен составителями экзаменационных материалов. Его применяет подавляющее большинство обучающихся.

Решите уравнения самостоятельно:

a) $\frac{-18}{x^2} + \frac{7}{x} + 1 = 0$ (Ответ: $x_1 = -9$; $x_2 = 2$);

b) $\frac{-6}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 = 0$ (Ответ: $x_1 = -3$; $x_2 = 2$);

c) $\frac{-4}{x^2} + \frac{3}{x} - 1 = 0$ (Ответ: $x = \emptyset$);

d) $\frac{8}{x^2} + \frac{2}{x} - 1 = 0$ (Ответ: $x_1 = 4$; $x_2 = -2$).

Заключение

Мной рассмотрены типичные ошибки выпускников прошлых лет, а значит, я их уже не допущу. Моя главная цель на данном этапе - помочь своим одноклассникам достичь высокого результата на экзаменах и самой сдать ГИА на «ОТЛИЧНО». В этом нам поможет банк заданий с разбором решения и заданиями для самостоятельного решения.

Список литературы

1. Марков С.Н., Осипенко Л.А., Лапшина Е.С. Результаты государственной итоговой аттестации в форме основного государственного экзамена по математике в Иркутской области в 2017 году. Методические рекомендации. – И: ГАУ ДПО ИРО, 2017. – 23с.
2. Лапшина Е. С., Марков С. Н., Осипенко Л. А. Результаты государственной итоговой аттестации в форме основного государственного экзамена по математике в Иркутской области в 2018 году. Методические рекомендации.– И: ГАУ ДПО ИРО, 2018. – 42 с.
3. Гаер М. А., Лапшина Е. С., Марков С. Н. Результаты государственной итоговой аттестации в форме основного государственного экзамена по математике в Иркутской области в 2019 году. Методические рекомендации. – И: ГАУ ДПО ИРО, 2019. – 38 с.

