ПРИМЕНЕНИЕ БАРИЦЕНТРИЧЕСКОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Казакова Е. А.

Математика

11 класса, ГБОУ СОШ №1 «ОЦ» с. Кинель-Черкассы

Научный руководитель: Зимовец Т. И., учитель математики высшей квалификационной категории ГБОУ СОШ №1 «ОЦ» с. Кинель-Черкассы

Введение

С методом центра масс я познакомилась на уроках физики. Он меня очень заинтересовал, и я решила подробнее изучить возможности его практического применения. Из научных публикаций и электронных ресурсов Интернет узнала, что метод центра тяжести (барицентрический метод) широко используется во многих областях науки и техники, в строительстве, архитектуре, спорте, цирке, быту. Меня особенно заинтересовало его применение в математике, поскольку этот метод позволяет сравнительно просто решать изрядное число трудных математических задач и эти решения часто очень наглядные.

Актуальность моей работы состоит в том, что изучаемый метод даёт возможность решать задачи по математике, в том числе повышенного уровня сложности, с применением нестандартного, не изучаемого в школьном курсе математики метода доказательств теорем, свойств и формул, повышающих мои шансы и шансы моих одноклассников на успех при решении задач. Данная методика значительно упрощает решение задач практического характера.

Цель работы – исследование возможности применения барицентрического метода при решении геометрических, алгебраических и практических задач.

Для достижения данной цели были поставлены следующие **задачи**: изучить теорию вопроса «Центр масс»; показать, что физических представлений понятия центра масс достаточно, чтобы решать ряд задач, изучаемых в школьном курсе математики; провести исследование, направленное на определение области применения барицентрического метода при решении физических и математических задач школьного и повышенного уровня сложности, а так же для решения практических задач; создать тематический сборник задач для старшеклассников по данной теме.

Гипотеза исследования – применение барицентрического метода значительно упрощает решение многих геометрических, алгебраических и практических задач.

Объект исследования – физические, математические и практические задачи школьного и повышенного уровней сложности; технические характеристики детских спортивных площадок и их оборудования.

Предмет исследования – барицентрический метод, задачи и теоремы, к которым можно применить этот метод, возможность применения метода барицентра к определению центра тяжести плоских фигур и исследованию условий безопасного использования детского спортивного снаряда.

Методы исследования – наблюдение, измерение, сравнение, анализ результатов исследования.

Практическая значимость работы заключается в полученных знаниях и овладении методом, который позволяет более просто и наглядно решить некоторые математические задачи, задачи практического характера, а также в создании тематического сборника задач, для старшеклассников, увлекающихся математикой.

История

Основоположником барицентрического метода был великий древнегреческий мыслитель Архимед. Он еще в III в до н. э. обнаружил возможность доказывать некоторые математические факты с помощью свойств центра масс. Именно таким способом Архимедом впервые была доказана теорема о пересечении медиан треугольника.

Теоретическая часть. Барицентрический метод

В основе барицентрического метода лежат следующие физические понятия: материальная точка, центр тяжести тела, центр масс, момент силы, плечо, условия статического равновсия.

Координаты центра масс - средние координаты системы тел.

Для системы из *n* материальных точек координаты центра масс по осям *X* и *Y* определяются формулами:

$$X_c = \frac{m1x1+m2x2+\ldots+mnxn}{m1+m2+\ldots mn};$$

$$Y_c = \frac{m1y1+m2y2+\ldots+mn}{m1+m2+\ldots+mn}$$

Центр тяжести однородного симметричного тела лежит в центре симметрии. [10, с. 65-68] Если требуется найти центр тяжести плоской тонкой пластины сложной формы и разбить ее на части, имеющие правильную геометрическую форму трудно, то определить центр тяжести тела можно практическим путём.

Возможность экспериментального метода определения положения центра тяжести объектов, конечно, ограничена. С его помощью невозможно найти центр тяжести молекул, звёздных скоплений, различных сооружений и механизмов. В таких случаях при расчётах используют формулы координат центра масс.

«Применение математики в физике общеизвестны,… существуют, однако, математические задачи, при решении которых с успехом могут быть использованы понятия и законы физики».[7, с. 4] Отметим, что физических представлений понятия центра масс достаточно, чтобы решать ряд задач, изучаемых в школьном курсе математики.

Для того чтобы с помощью понятия центра масс решать математические задачи, следует ввести точный математический смысл понятия центра масс с помощью геометрических терминов.

Если в точке A помещена масса m, то эту материальную точку можно обозначить так: (A, m). Массу m иногда называют «нагрузкой точки A».

При решении математических задач материальную точку будем обозначать (A, *a*). В математических приложениях число m можно считать не только положительным (как в механическом понимании массы), но и отрицательным.

Центром масс «двух материальных точек (А, a) и (В,b) называется такая третья точка С, которая лежит на отрезке АВ и удовлетворяет правилу рычага: произведение её расстояния СА от точки А на массу a равно произведению её расстояния СВ от точки В на массу b»: $a \cdot \mathrm{CA} = b \cdot \mathrm{CB}$ или $\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}=\frac{b}{a}$.

Если $a \neq b$, то центр масс будет ближе к точке с большей массой. Если прямая проходит через центр масс двух материальных точек и через одну из них, то она пройдёт и через другую.

Символическая запись: Z[(А, a), (В,b)] ≡ С означает центром масс «двух материальных точек (А, a) и (В, b) является точка С»

Центр тяжести n материальных точек при n >2 находится так: находится центр тяжести (n-1) материальных точек; помещается в эту точку масса всех (n-1) материальных точек; находится центр тяжести этой, вновь образовавшейся (n-1) материальной точки, с n-ой материальной точкой. Новая материальная точка, помещенная в центр тяжести нескольких точек и обладающая их общей массой, называется объединением данных материальных точек.

Применение барицентрического метода к решению задач с растворами веществ

Понятие центра тяжести можно с успехом использовать для вычисления компонентов растворов, сплавов, химических соединений, механических смесей нескольких веществ.

Смесь веществ состоит из двух компонентов А и В. Пусть масса компоненты А равна p, а компоненты В равна q, тогда масса всей системы m=p+q (единиц). Концентрация компоненты А в смеси – масса компоненты А, приходящаяся на единицу массы всей смеси. Концентрации компонент А и В в системе обозначим a и b, тогда концентрации $a = \frac{p}{m}$,$b = \frac{q}{m}$, а $a + b = 1$. Концентрацию часто выражают в процентах.

Раствор состоит из400 г воды 100 г соли.

Тогда m = 400 + 100=500(г). Концентрация соли $\frac{100}{500}$ = 0,2 = 20%.

Концентрация воды в растворе равна $\frac{400}{500}$ = 80%

Начертим отрезок АВ длиной равной единице. (Рис. 1)

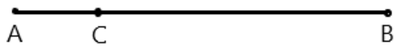

Рис. 1

Из двух компонентов можно составить много смесей, которые будут отличаться по массе или концентрации. Каждой такой смеси на отрезке АВ можно сопоставить точку С с носителем с, так чтобы СА=*b*, а СВ=*a*, т.е. точка С представляет собой центр масс двух точек (А, *a*) и (В, *b*), а значит и точек (А, *am*) и (В, *bm*).

Материальная точка С - объединение этих двух точек:

Z [(А, *a*), (В,*b*)] ≡ С

Обратно, любая материальная точка (С, с) на отрезке АВ изображает некоторую смесь веществ А и В. Масса этой смеси равна *m* единицам, концентрация компоненты А равна *a*, концентрация компоненты В равна *b*.

Если имеются две смеси из веществ А и В, каждая из них характеризуется материальными точками $C_1 \equiv (C_1,c_1)$ и $C_2 \equiv (C_2,c_2)$ необходимо составить смесь из двух этих смесей одну новую смесь.

На прямой АВ появится точка С, которая будет характеризовать соотношение компонентов новой смеси. (Рис. 2)

$$Z\,[(C_1,c_1),\,(C_2,c_2)] \equiv C$$

Рис 2

Смесь, которая получится от смешения двух или нескольких смесей, будем называть объединением этих смесей.

Вывод. Если две смеси характеризуются материальными точками $C_1 \equiv (C_1,c_1)$ и $C_2 \equiv (C_2,c_2)$, то объединение этих смесей, характеризуется объединением этих двух материальных точек, т. е. материальной точкой

$$(C,\,c) \equiv (C_1,c_1) + (C_2,c_2),\ \text{где } c = c_1 + c_2.$$

Итак, решения многих математических задач можно получить, привлекая свойства масс (или барицентра системы материальных точек).

«Барицентрическое решение» использует понятия, заимствованные из механики: масса, материальная точка, центр масс, правило рычага и опирается на наглядные физические соображения.

Практическая часть

Решим барицентрическим методом задачу, предложенную в 2017 году на региональном этапе Всероссийской олимпиады школьников

Задача №1. «Дан прямоугольник $ABCD$, у которого $AD = 2, DC = 3$. На стороне AB взяли точку M, а на стороне BC — точку N так, что $BM = BN = 1$. Прямые AN и CM пересекаются в точке P. Найдите угол APM.» [2, дата обращения:21.12.2019 г.] (Рис. 5)

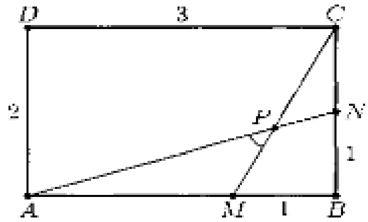

Рис. 5

Дано:$ABCD$- прямоугольник , $AD = 2$, $DC = 3$, $BM = BN = 1$.

Найти: $\angle APM$

Решение.

Из условия задачи $ABCD$- прямоугольник, значит $AB = DC$, $AD = BC$;

$AM = 3 - 1 = 2$; $CN = 2 - 1 = 1$.

С помощью правила рычага найдём массу точек A и B:

$AM / BM = 1 / 2$, т. е. имеем две материальные точки: (A, 1) и (B,2).

Z [(A, 1), (B, 2)] ≡ (M, 3)

$CN=NB=1$ с помощью правила рычага найдём массу точки С:

$CN/NB = 1$, значит (C, 2).

Z [(C, 2), (B, 2)] ≡ (N,4),P Є MC и для неё выполняется условие,

Z [(M, 3), (C,2).] ≡ (P, 5).

P Є ANZ [(A, 1), (N,4).] ≡ (P, 5), значит AN и MC пересекаются точке P и она является центром симметрии точек (A, 1), (B,2) и (C, 2).

Найдём длины сторон ΔAPM. Согласно правилу рычага $\frac{AP}{PN} = \frac{4}{1}$

Из ΔANB по теореме Пифагора $AN = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \Rightarrow AP = \frac{4}{5}\sqrt{10}$.

Аналогично $\frac{PM}{PC} = \frac{2}{3}$, $MC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \Rightarrow PM = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

$AM = 2$

По теореме косинусов: $AM^2 = AP^2 + PM^2 - 2\,AP\cdot PM\cdot\cos\angle APM$

$\cos\angle APM = \sqrt{2}/2$, $\angle APM = 45^\circ$.

Использованный при решении данной задачи барицентрический метод, был для меня более простым и наглядным.

Я решила проверить: насколько использование этого метода окажется полезным одноклассникам. Для этого по моей просьбе учитель математики предложила им решить задачу №99573РЕШУ ЕГЭ (методом, изученным в школе). Далее я объяснила: как решать такие задачи барицентрическим методом (центра масс). Результаты решения задачи значительно улучшились, что можно увидеть из таблицы 1.(Количество человек, участвовавших в эксперименте – 48 учеников 11 класса.)

Критерии	Решение изученным методом	Решение новым методом
Время, потребовавшееся на решение, мин	10	3
Решили правильно, %	52	78

Таблицы 1

Умение находить центр масс необходимо не только школьникам для успешного решения задач по физике и математике, но и людям разных профессий: простому рабочему, инженеру, конструктору, спортсмену, каскадеру.

Мы часто встречаемся в быту с задачами по получению веществ нужной концентрации. Например, маме на кухне нужен столовый уксус, а у нее только 70% уксусная кислота, или кошка поцарапала лапку, и, чтобы обработать ранку, я готовлю 1% раствор йода из 5%, купленного в аптеке.

Задача №2. Сколько воды надо добавить к 50г 70% раствора уксусной кислоты, чтобы получить 9% раствор столового уксуса?

Решение. На отрезке АВ точка А соответствует чистой воде (100%), а точка В чистой уксусной кислоте (100%). (Рис. 3)

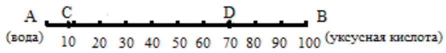

Рис. 3

Найдём массу материальной точки (A, m_1).

Точка $C(m_1 + m_2) \equiv Z[(A, m_1), (D, m_2)]$.

По правилу рычага: $\frac{m1}{50} = \frac{CD}{AD} = \frac{0,61}{0,09} = \frac{61}{9} =$, откуда $m_1 = \frac{61 \cdot 50}{9} \approx 339$ г.

Задача №3. В детском садике на спортивной площадке есть спортивный снаряд «Ракета». Я решила проверить его устойчивость. Из школьного курса физики я знаю, что положение его будет устойчивым, если отвесная линия, проведённая из центра тяжести снаряда (вместе с Димой), не выходит из площади опоры. Я поставила себе задачу – определить положение центра тяжести снаряда (вместе с Димой) и выяснить его устойчивость.

Решение задачи.

1)В результате анализа формы снаряда я определила: из каких геометрических фигур состоит «Ракета»; сколько осей симметрии имеет снаряд; имеет ли снаряд центр симметрии; где расположены центры симметрии геометрических фигур;

2)Измерила длины вертикальных стоек, длины наклонных трубок, диаметр колец.

3)Рассчитала: сколько метров трубки потребовалось на изготовление отдельных частей снаряда:

Диаметр кольца D=0,9 м. Длина трубки кольца равна длине окружности $C = \pi D$; C=3,14 · 0,9 ≈ 2,83 (м)- длина окружности, длина вертикальной стойки - 1,9м; длина наклонной трубки - 0,74 м; диаметр кольца-0,9 м. Определила массу этих частей, зная, что масса 1м трубы, из которой сделан снаряд, равна 2,12 кг/м: масса кольца $m_1 = 2,12 \cdot 2,83 = 6,00$ (кг); масса вертикальной стойки $m_2 = 2,12 \cdot 1,9 = 4,03$ (кг); масса наклонной трубки $m_3 = 2,12 \cdot 0,74 = 1,57$ (кг). Используя барицентрический метод, определила центр тяжести «Ракеты».

Так как фигура симметрична, то центры тяжести отдельных ее элементов лежат на оси симметрии снаряда. Расположим на оси OY положения центров тяжести этих частей. (Рис. 4)

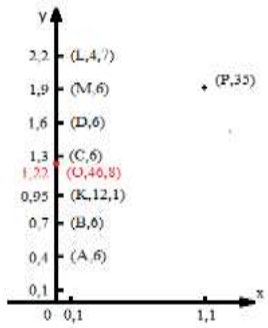

Рис. 4

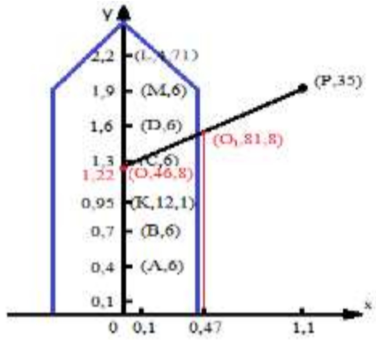

Рис. 5

$$y_o = \frac{0{,}4 \cdot 6 + 0{,}7 \cdot 6 + 0{,}97 \cdot 12{,}09 + 13{,}6 \cdot 6 + 1{,}6 \cdot 6 + 1{,}9 \cdot 6 + 2{,}2 \cdot 4{,}71}{6 + 6 + 12{,}09 + 6 + 6 + 6 + 4{,}71}$$
$$= 1{,}22$$

Используя барицентрический метод, определила центр тяжести «Ракеты», на которой находится ребёнок массой 35 кг. (Рис. 5)

$$x_{o_1} = \frac{0 \cdot 6 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 12{,}09 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 4{,}71 + 1{,}1 \cdot 35}{6 + 6 + 12{,}09 + 6 + 6 + 6 + 4{,}71 + 35} = 0{,}47$$

$$y_{o_1} = \frac{1{,}22 \cdot (6 + 6 + 12{,}09 + 6 + 6 + 6 + 4{,}71) + 1{,}9 \cdot 35}{6 + 6 + 6 + 12{,}09 + 6 + 6 + 6 + 4{,}71 + 35} = 1{,}51$$

4) Используя условия устойчивого равновесия, сделала вывод об условиях безопасности использования снаряда в детском садике.

Так как линия отвеса, проведенная из центра тяжести «Ракеты» и ребенка, выходит за пределы площади опоры, то при установке снаряда необходимо было применить дополнительные меры безопасности: сместить центр тяжести конструкции за счет утяжеления его нижней части или увеличения площади опоры. Данный снаряд самодельный, и, очевидно, изготовитель не был знаком с условиями устойчивого равновесия. Фабричные «Ракеты» выглядят иначе.

Заключение

По результатам проведённых исследований сделала следующие выводы: я изучила теорию вопроса «Центр масс»; с помощью исследования выяснила, что физических представлений понятия центра масс достаточно для решения целого ряда задач, изучаемых в школьном курсе математики; определила, что область применения барицентрического метода при решении физических и математических задач школьного и повышенного уровня сложности довольно обширна; исследовала применение барицентрического метода к решению практических задач по определению концентрации веществ и выяснению условий безопасного использования детского спортивного снаряда; основной результат моей работы - создание тематического сборника задач «Применение метода центра тяжести к решению математических задач» для старшеклассников. (Сборник составлен, оформлен, распечатан и размещен в медиакабинете и кабинете «Точка роста» школы)

Анализируя результаты исследования, считаю, что практическая значимость моей работы заключается в следующем: я изучила теорию вопроса «Центра масс» и выступила перед старшеклассниками школы с сообщением по применению метода центра масс к решению задач, и применение данного метода к решению сложных математических и физических задач мной и моими одноклассниками показало хорошие результаты; убедилась в целесообразности применения барицентрического метода к расчёту условий безопасности детского спортивного и игрового оборудования; задачник размещен в медиатеке и кабинете «Точки роста» школы, который может быть использован учениками нашей школы при подготовке к урокам, экзаменам и олимпиадным работам по математике, а также учителями математики при проведении уроков и внеурочной деятельности.

Библиографический список

1. Архив Всероссийской олимпиады [vos.olimpiada.ru](дата обращения: 21.12.2019 г.)
2. Балк М. Б. Геометрические приложения понятия центра тяжести, Физматгиз, 1959. - 232 с.
3. Библиотечка «Квант»: № 61 М. Б. Балк, В. Г. Болтянский, Геометрия масс. – 1987 г. - 160 с.
4. Решу ЕГЭ [ege.sdamgia.ru](дата обращения: 17.12.2019 г.)
5. Решу ОГЭ [phys-oge.sdamgia.ru](дата обращения: 27.11.2019 г.)
6. Соколова Н. Е., Центр тяжести, Учпедгиз, 1958. - 96с
7. Успенский В. А., Некоторые приложения механики к математике, Физматгиз, 1958.Учпедгиз, 1958. - 48 с.