

# О НЕКОТОРЫХ ТРЕУГОЛЬНИКАХ И ИХ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧКАХ И ЛИНИЯХ, КОТОРЫХ НЕ ВСТРЕТИШЬ В ШКОЛЬНЫХ УЧЕБНИКАХ

предмет: Математика

Авторы: Кирюшина Яна и Кудряшева Дарья,

10 социально-гуманитарный класс

ГБОУ «Брянский городской лицей №1 имени А.С. Пушкина»

Руководитель: Ефремова Любовь Ивановна, учитель математики

ГБОУ «Брянский городской лицей №1 имени А.С. Пушкина»

## Введение

*«Вдохновение нужно в поэзии,  
как и в геометрии»*

А.С. Пушкин

Изучая произведение А.С. Пушкина «Каменный гость», в 9-ом классе, мы обратили внимание на то, что в нем неоднократно упоминаются геометрические фигуры, например, *треугольник*.

*«И кровь нейдет из треугольной ранки...»*

Вернемся к геометрии. Математики называют треугольник двумерным симплексом. «Симплекс» - по латыни означает простейший. Трёхмерным симплексом называют треугольную пирамиду. Именно в силу своей простоты треугольник является основой многих измерений. Треугольник всегда имел широкое применение в практической жизни. Так, в строительном искусстве испокон веков используется *свойство жесткости треугольника* для укрепления различных строений и их деталей. Изображение треугольников и задачи на треугольники встречаются в папирусах, в старинных индийских книгах и других древних документах. Благодаря своей универсальности математика стала использоваться в естественных, гуманитарных науках и во всех сферах жизни человека [7].

И несмотря на то, что мы учимся в социально-гуманитарном классе, мы все-таки хотим расширить свои знания, особенно про свойства треугольника,

которые могут пригодиться нам при сдаче ОГЭ и при подготовке к математическим олимпиадам, в которых мы тоже участвуем.

В прошлом учебном году мы работали над проектом, связанным с внеурочными занятиями и хотели как-то косвенно продолжить изучение этой темы. Поэтому мы решили остановиться на треугольниках, которые не входят в школьную программу и их замечательных точках и линиях. Ведь недаром А.С. Пушкин, чье имя носит наше учебное заведение, прибегал в художественных произведениях к треугольнику, как источнику вдохновения. Итак, о простом и неисчерпаемом треугольнике...

**Объект исследования:** треугольники Жергона и Нагеля.

**Предмет исследования:** замечательные точки и линии в треугольнике.

**Цель проекта:** изучение и обобщение знаний о треугольниках за страницами учебника.

**Задачи:**

- изучить теоретический материал по теме: «О некоторых треугольниках и их замечательных точках и линиях, которых не встретишь в школьных учебниках»;
- повторить замечательные точки в треугольнике за школьный курс геометрии;
- расширить кругозор знаний по геометрии по замечательным точкам и линиям в треугольнике;
- научиться применять данные теоретические знания при решении задач планиметрии
- подготовить подборку задач для элективного курса по данной теме;
- создать буклет, как справочное пособие по данной теме;
- выпустить брошюру для элективного курса по математике «Замечательные линии и точки в треугольнике».

Мы выдвигаем гипотезу, что желание изучать и применять неизвестные теоремы при решении задач, может способствовать развитию интереса к геометрии, как науке.

## Основная часть

Четыре замечательные точки треугольника, изучаемые в школе.

Переходя к основной части работы, мы начнём с замечательных точек треугольника. К числу таких точек, изучаемых в школьном курсе геометрии, относятся: рис.1(а,б,в,г) [1].

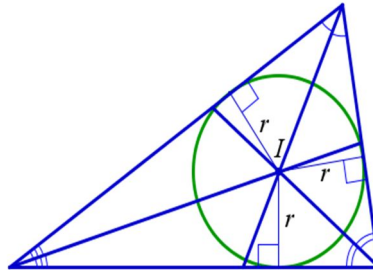


Рис.1(а), точка пересечения медиан,  
 $O$  – центр тяжести (*барицентр*)

Рис. 1(б), точка пересечения  
биссектрис,  $I$ - центр вписанной  
окружности (*инцентр*)

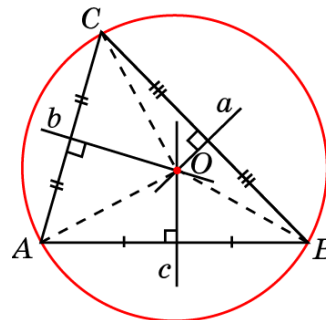
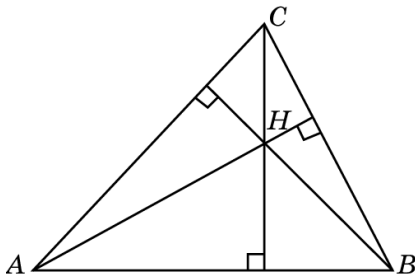


Рис. 1(в), точка пересечения высот  
 $H$  – ортоцентр

рис.1(г), точка пересечения  
серединных перпендикуляров к  
сторонам треугольника  
 $O$  - центр описанной окружности.

На эти четыре точки было обращено особое внимание, и, начиная с XVIII века, они были названы «замечательными» или «особенными» точками треугольника.

## Формулировки теорем Чевы и Менелая

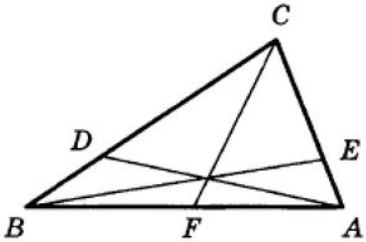
Начало открытий замечательных точек треугольника, не изучаемых в школе,

положил в 17 веке Джованни Чева (Ceva) (1648 - 1734) – итальянский математик. Основной заслугой Чевы является построение учения о секущих, которое положило начало новой – синтетической геометрии; оно изложено в сочинении "О взаимнопересекающихся прямых". Его теорема позволила открыть свойства замечательных точек треугольника, известных как точки Нагеля и Жергона [4].

**Определение:** отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне или ее продолжении, называется чевианой (Рис.2) [4].

### Теорема Чевы

Для того чтобы прямые  $BE$ ,  $AD$  и  $CF$  пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$


### Теорема Менелая

Если на сторонах  $BC$ ,  $AB$  и продолжении стороны  $AC$   $\triangle ABC$  за точку  $C$  отмечены соответственно точки  $A_1$ ,  $C_1$  и  $B_1$ , лежащие на одной прямой, то

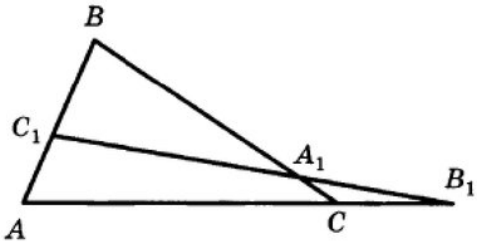
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$


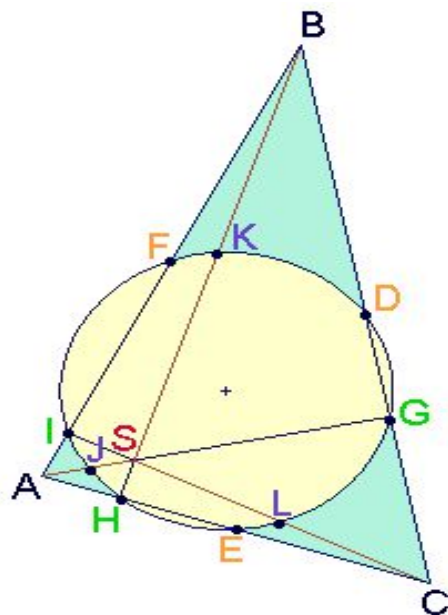
Рис. 2. Теорема Чевы и теорема Менелая

## Прямая и окружность Эйлера [2]

### Прямая Эйлера.

В 1765 году Эйлер доказал, что в любом треугольнике ортоцентр, барицентр и

центр описанной окружности лежат на одной прямой, названной позже «прямой



Эйлера» (Рис.3).

Рис. 3. Прямая и окружность Эйлера

### Окружность Эйлера[2]

Средины сторон треугольника, основания его высот и средины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности. Эта окружность называется окружностью девяти точек или окружностью Эйлера (Рис.3).

### Свойство точек Жергонна и Нагеля [3]

**Определение.** Точкой **Жергонна** называется точка пересечения отрезков, которые соединяют вершины треугольника с точками касания сторон, противоположных этим вершинам, и вписанной в треугольник окружности. Пусть точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Пусть вписанная окружность касается сторон треугольника BC, AC и AB в точках D, E и F соответственно. Точка Жергонна — это точка пересечения отрезков AD, BE и CF.

Докажем, что эти три отрезка действительно пересекаются в одной точке. Заметим, что центр вписанной окружности — это точка пересечения биссектрис углов треугольника ABC, а радиусы вписанной окружности ID, IE и IF перпендикулярны сторонам треугольника. Тем самым, имеем три пары равных треугольников.

Произведения  $AF \cdot BD \cdot CE$  и  $AE \cdot BE \cdot CF$  равны, поскольку

$$BF=BD, CD=CE, AE=AF$$

следовательно, отношение этих произведений равно 1, и по теореме Чебы,

отрезки пересекаются в одной точке.

### Определение и свойство точки Нагеля [3]

**Точка Нагеля** — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с соответствующими внеписанными окружностями.

- *Точка Нагеля* лежит на одной прямой с инцентром и центроидом, при этом центроид делит отрезок между точкой Нагеля и инцентром в отношении 2:1. Эта прямая называется **прямой Эйлера**.
- Если точки  $T_A \in BC, T_B \in CA, T_C \in AB$  таковы, что каждый из отрезков  $AT_A, BT_B$  и  $CT_C$  делит периметр треугольника пополам, то эти отрезки пересекаются в одной точке — точке Нагеля.

**Треугольник Жергонна** (для треугольника  $ABC$ ) определяется тремя точками касания вписанной окружности на трёх сторонах. Эти вершины обозначим  $T_A, T_B$  и  $T_C$ . Точка  $T_A$  лежит напротив вершины  $A$ , точка  $T_B$  напротив вершины  $B$ , точка  $T_C$  напротив вершины  $C$ . Этот треугольник Жергонна  $T_A T_B T_C$  известен также, как **треугольник касаний** треугольника  $ABC$  (Рис.4).

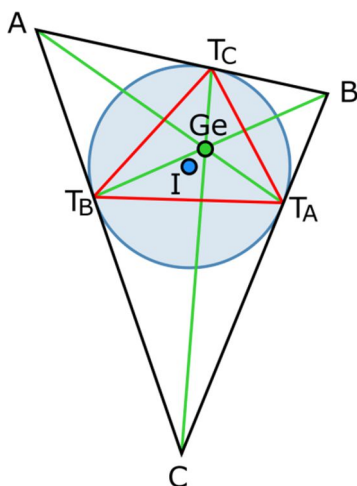


Рис. 4. Треугольник Жергонна

#### Свойства:

- Три прямые  $AT_A, BT_B$  и  $CT_C$  пересекаются в одной точке – точке Жергонна.
- Точка Жергонна треугольника является точкой пересечения симедиан

треугольника Жергонна.

Пусть, точки касания вписанной в данный треугольник окружности соединены отрезками, тогда получится треугольник Жергонна, и в полученном треугольнике проведены высоты. В этом случае прямые, соединяющие основания этих высот, параллельны сторонам исходного треугольника. Следовательно, *ортотреугольник* треугольника Жергонна и исходный треугольник подобны.

**Теорема Жергонна.** Пусть три чевианы АД, ВЕ и СF пересекаются в точке К внутри треугольника АВС. Тогда выполняются следующие равенства:

$$1) \frac{KD}{AD} + \frac{KE}{BE} + \frac{KF}{CF} = 1$$

$$2) \frac{AK}{AD} + \frac{BK}{BE} + \frac{CK}{CF} = 2$$

**Доказательство.** Поскольку выполняются очевидные равенства

$$\frac{AK}{AD} + \frac{KD}{AD} = 1, \frac{BK}{BE} + \frac{KE}{BE} = 1, \frac{CK}{CF} + \frac{KF}{CF} = 1$$

то равенства 1) и 2) эквивалентны. Докажем первое из них.

Рассмотрим отношения площадей треугольников

$$\frac{S(\Delta BKC)}{S(\Delta ABC)} = \frac{KD}{AD}, \frac{S(\Delta AKC)}{S(\Delta ABC)} = \frac{KE}{BE}, \frac{S(\Delta AKB)}{S(\Delta ABC)} = \frac{KF}{CF}$$

Здесь мы используем тот факт, что отношения площадей треугольников, имеющих общую сторону, равны отношениям их высот. Соответственно, отношение высот будет равно отношению длин параллельных отрезков, проведенных к общей стороне из противоположной вершины.

Теперь сложим отношения площадей:

$$\frac{KD}{AD} + \frac{KE}{BE} + \frac{KF}{CF} = \frac{S(\Delta BKC) + S(\Delta AKC) + S(\Delta AKB)}{S(\Delta ABC)} = 1$$

### Треугольник Нагеля [3]

Треугольник Нагеля для треугольника АВС определяется вершинами  $T_A$ ,  $T_B$  и  $T_C$ , которые являются точками касания внеписанных окружностей треугольника АВС и точка  $T_A$  противоположна стороне АВ, и т. д. (рис.5).

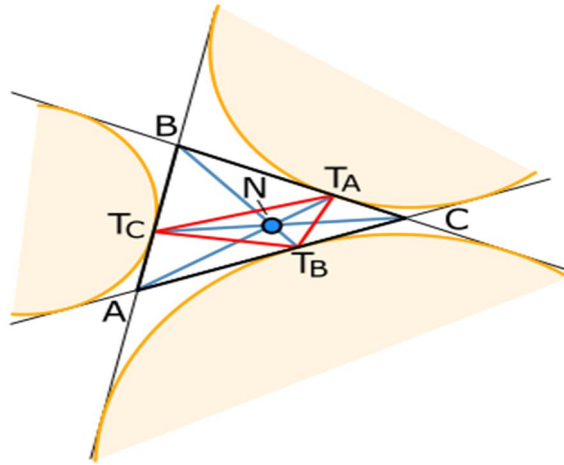


Рис. 5. Треугольник Нагеля

**Свойства:** описанная вокруг треугольника  $T_A, T_B, T_C$ , окружность называется **окружностью Мандарта** (частный случай эллипса Мандарта)

- Три прямые  $AT_A, BT_B$  и  $CT_C$  делят периметр пополам и пересекаются в одной точке Нагеля.

**Основные геометрические характеристики:**

1) Если ширина треугольника Рёло равна  $a$ , то его площадь равна:

$$S = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})a^2$$

2) Периметр:  $P = \pi a$

3) Радиус вписанной окружности:  $r = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)a$

4) Радиус описанной окружности:  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

**Построение:**

Треугольник Рёло можно построить с помощью одного только циркуля, не прибегая к линейке. Это построение сводится к последовательному проведению трёх равных окружностей. Центр первой выбирается произвольно, центром второй может быть любая точка первой окружности, а центром третьей — любая из двух точек пересечения первых двух

### Заключение

Для написания своей работы мы рассмотрели много теоретического материала.

Исследовали точки Жергонна и Нагеля, а также их треугольники и получили новые знания, использовал их при решении задач. Работая над темой, мы поняли, что, несмотря на то, что треугольник называют простейшей фигурой, он



скрывает в себе еще много тайн, которые предстоит разгадать ученым.

Слова Жергонна о математических теориях: «Нельзя хвастаться тем, что ты сказал последнее слово в какой-либо теории, если не можешь объяснить ее несколькими словами первому встречному на улице» [2].

Обобщая всё вышесказанное, можем уверенно отметить, что сформулированная нами гипотеза, полностью подтверждена. Для нас решение задачи с использованием новых теорем и свойств доставляет огромное удовольствие. Тем более, что умение самостоятельно изучать дополнительный теоретический материал, обобщать и применять при решении задач поможет нам в дальнейшем.

Теоретический и практический материал мы постарались изложить в работе так, чтобы она была легка в изучении, как учителю, так и ученику. А задачи, выбранные нами из учебника «Геометрия 7-9» под редакцией Атанасяна Л.С и задачников по геометрии, помогут в закреплении этой темы. Теоремы Чевы и Менелая казались сложными и непонятными на первый взгляд, но они оказались простыми и интересными. Теоремы Чевы и Менелая находят применение в задачах, в которых присутствуют секущие прямые. Они не изучаются в курсе 7-9 классов. Но решение с помощью теорем Чевы и Менелая более рационально, чем решение другими способами.

Мы считаем, что теоремы Чевы и Менелая должны быть включены в курс 7-9 классов, потому что они расширяют кругозор ученика, дают возможность решать задачи просто и легко. Исследование, проведенное нами, поможет хорошо сдать экзамены.

Знакомство с геометрическими фигурами, изучение которых не входит в рамки школьной программы, позволяет приобрести новые знания и иначе посмотреть на знакомые предметы.

Цель работы достигнута, и задачи решены, для успешной сдачи экзамена по геометрии сделан огромный шаг вперед. Мы продолжим работать над этой темой и поучимся решать задачи на замечательные точки треугольника.

## **Список источников информации**

1. Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. «Геометрия 7-9», Москва, «Просвещение», 2015. -383 с.:ил.
2. Н.Б. Бирюкова. Логическая мысль во Франции XVII- начала XIX столетий: Французские предвосхищения идей математической логики. М., 2006. С.150-159 и др.
3. И.Вебер, И.Вайштейн . Энциклопедия элементарной геометрии (Книга 2)
4. А.Г.Мякишев. Элементы геометрии треугольника. Серия: «Библиотека "Математическое просвещение"». М.:МЦНМО,2002. с. 11, п. 5.
5. К.А. Рыбников. Возникновение и развитие математической науки: Кн. Для учителя. – М.: Просвещение, 1987. – 159 с.: ил.
6. Энциклопедия. Мудрость тысячелетий. – М.: ОЛМА-ПРЕСС, 2004.
7. Сайт <http://ru.wikipedia.org/wiki>.