

Научно-исследовательская работа
МАТЕМАТИКА (геометрия)

Тема работы
«Многомерность пространства»

Выполнил:

Ларионов Александр Владимирович

учащийся 8 «А» класса

МАОУ Одинцовского лицея №6 им. А.С. Пушкина

Руководитель:

Пилипенко Галина Ивановна

учитель математики

МАОУ Одинцовского лицея №6 им. А.С. Пушкина,

Введение

С раннего детства меня интересовали самолеты, их устройство и все, что с ними связано. Изучение технической литературы, занятия в кружке авиа моделирования, собственные эксперименты, привели меня к этой работе.

1. Предметная область

Геометрия

2. Разработанность исследуемой проблемы

А. Эйнштейн создал Теорию Относительности в многомерности, тем самым, внес вклад в изучение многомерных пространств. Так же, математик Р. Декарт создал систему координат – «жизненно» необходимую для изучения пространства. Так же была создана теория Пуанкаре, которая была доказана полностью лишь в 2002 году. Так же, существует теория Калуцы – Клейна[1], вкратце, описанная здесь.

3. Цель работы

Исследование измерений в геометрии, решение геометрических задач. Изучение теорий. Расширение кругозора учащихся, путем толкования темы максимально доступным языком.

4. Актуальность

Работа нацелена рассказать о теориях многомерного пространства, показать, как решаются нестандартные задачи по геометрии, с применением элементов алгебры 7-8 класса школьной программы. Далее описываемый материал не включен в общеобразовательный комплекс геометрии средней и старшей школы.

5. Методы

Поиск и изучение источников информации, изучение и задач, их решение и методы решения. Решение некоторых задач на нахождение гиперобъема (тессеракт, пентаракт, гексеракт и т.д; симплекс) и на вычисление гипердиагонали геперкубов.

Определения

В этой работе будут использоваться специальные для этой темы обозначения. Обозначения приведены ниже с толкованием.

Гиперобъем – некоторая величина, обозначающая «внутренность» гипертел. Вычисляется по формуле $V_N = a^N$, где N – мерность пространства. В конце решения задачи ставится метрическая единица длины с индексом N. пример: $V_N = 279936\text{см}^7$ (показано на примере вычисления гиперобъема гиперкуба 7^{ой} мерности пространства, хептеракт)

Мерность пространства – или «**Размерность пространства**», бытовое название «измерение». [4] Количество независимых параметров, нужных для описания состояния объекта. К примеру, в 3^x мерном пространстве, для описания, к примеру, куба, нам необходимо 3 величины: x – длина, y – высота и z – ширина. По тому же самому алгоритму выполняются описания гипертел уже в других мерностях, то есть в 4^{ой} мерности будет 4 величины и так далее.

Гиперкуб – куб N – мерности. Префикс «гипер» добавляется ко всем многомерным аналогам 3^x мерных тел.

Гипердиагональ Гиперкуба – Диагональ между 2 вершинами гиперкуба. Находится по формуле $L_N = a\sqrt{N}$ (по аналогии с формулой диагонали квадрата).

Полигон – Подмножество Евклидова пространства, представляющее из себя конечное число симплексов.

Гипервысота – высота от основания гипертела. Обычно применяется при решении задач с симплексами.

Теория

Мы живем в трехмерном пространстве. Наши приборы не могут фиксировать наличие высших измерений. Это пытается объяснить теория

Калуцы–Клейна: высшие размерности имеют замкнутую топологию, поэтому они никак не проявляют себя в обычных условиях.

В данной работе описывается *теория размерности*. Далее приведены некоторые аспекты данной теории, необходимые для этой исследовательской работы.

Начнем с описания каждого из измерений, вплоть до 4, так как условно принято писать номер измерения как \underline{ND} , где N – мерность пространства. (D. – сокращ. от англ. «измерение»)

0D – измерение в пространстве, не имеющее величин. Пример 0-мерного тела – точка.

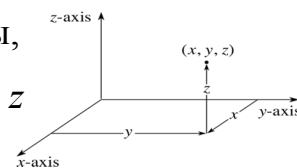
1D – измерение в пространстве, имеющее только величину x – длина. Примером послужит прямая. В этом измерении мы можем, условно, измерить длину прямой, если отложить на ней отрезок.

2D – измерение в пространстве, с двумя величинами, которые принято обозначать как x и y . где x – длина, y – высота. В этом измерении существует, так называемая, *Система координат* – некий комплекс определений, использующий метод координат для определения положения точки или множества точек или тела в пространстве с помощью символов или чисел.

Система координат была открыта французским философом и математиком *Рене Декартом*.

Примером для двумерного пространства служит, к примеру, квадрат, а так же еще огромное множество двумерных фигур. Мы можем найти, к примеру, площадь квадрата, по формуле $S = a^2$. Так же существует еще множество формул, применимых к остальным фигурам.

3D – измерение в пространстве, имеющее три величины, которые обозначают как x , y , z . Где x – длина, y – высота, z – ширина. В этом измерении, как и в предыдущем, есть



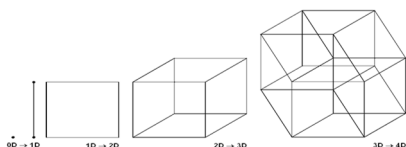
система координат, в которой присутствует, помимо длины и высоты, еще

ширина. Примером может послужить куб. Мы можем найти объем куба по формуле $V = a^3$. Так же существует множество формул по нахождению объема. 4D – измерение в пространстве, имеющее четыре величины, которые обозначают как x, y, z, ω . Где x – длина, y – высота, z – ширина, ω – время. Последняя переменная обусловлена тем, что *гипертела* (см. *Определения*) напрямую связаны со временем, так как гипертело имеет свойство вращаться и проходить своими гранями сквозь себя. Примером четырехмерного гипертела можно считать тессеракт, симплекс и много других аналогов 3^x мерных фигур. Можем найти *Гиперобъем тела* (см. *Определения*). Вычислим его по формуле $V_N = a^N$, где N – мерность пространства.

•*Примечание*

Заметим, что все формулы, присущие каждому из измерений, имеют аналоги в предыдущем измерении, кроме первого измерения, т.к в нулевом измерении нет формул нахождение какого – либо параметра точки, как таковых.

Измерения старше 4^{го} описывать не стоит, так как очень проблематично описать точку или гипертело в пространстве.



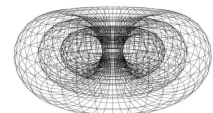
Точка, отрезок, квадрат, куб, тессеракт - соответственно.

Частные случаи

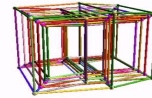
Тессеракт – Четырехмерный гиперкуб, аналог куба.

Симплекс – Обобщенное название n-мерного тетраэдра.

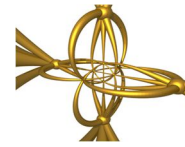
Гипертор – Многомерный аналог тора (*тор* – поверхность вращения, получаемая при вращении образующей окружности вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности, не пересекая ось)



Хептеракт (Гептеракт) – 7^{ми} мерный гиперкуб. 5-



Ортоплекс (Пентакросс, триаконтадигерон) –
правильный политоп. Проще говоря, 5^{ти} мерная
гиперпирамида из 16 ячеек.



Кросс-политоп – аналог 2^x мерного квадрата. Правильный политоп,
двойственный n – мерному гиперкубу.



Гиперкубы

Гиперкубы – фигуры, аналогичные трехмерному кубу [3].
Обобщенное понятие на случай с n – количеством мерностей. Существует 6
известных многомерных кубов: *Тессеракт, Пентеракт, Гексеракт,*
Хептеракт, Октеракт, Эннеракт, Декеракт.

Гиперобъем гиперкуба находится по формуле $V_n = a^n$.

Найдем гипердиагональ по формуле $L_N = a\sqrt{N}$.

Гиперкуб можно описать гиперсферой и вписать в него гиперсферу. радиус
описанной Гиперсферы $R = \frac{a\sqrt{N}}{2}$.

Радиус вписанной Гиперсферы находится по формуле $r = \frac{a}{2}$.

Все эти формулы применимы к кубам любой мерности.

Гиперкуб N – мерности удовлетворяет неравенству $\forall i: -\frac{a}{2} < x_i < \frac{a}{2}$, где a-
длина ребра.

Задачи (часть 1)

Задача №1

Дан Гиперкуб 7^{ой} мерности. Найдите его гиперобъем, при условии, что
длина ребра равна 3.

Решение:

Дано:	Вычисления
-------	------------

$a = 3;$	$V_n = 3^7$
----------	-------------

$n = 7$	$V_n = 2187$
---------	--------------

$V_n - ?$	
-----------	--

Ответ: 2187

Задача №2

Дан Эннеракт с Гиперобъемом равным 512 см^9 . Найдите длину ребра.

Решение:

Дано:	Вычисления
-------	------------

$V_n = 512 \text{ см}^9;$	$a = \sqrt[9]{512}$
---------------------------	---------------------

$n = 9$	$a = 2$
---------	---------

$a - ?$	
---------	--

Ответ: 2 см

Задача №3

Дан Тессеракт и гиперсфера, соответствующей мерности. Длина ребра является отношением $\frac{2}{x} = \frac{4}{6}$. Найдите радиус описанной гиперсферы.

Решение:

Дано:	Вычисления
-------	------------

$a - \frac{2}{x} = \frac{4}{6};$	$a = x \times 4 = 6 \times 2$
----------------------------------	-------------------------------

$n = 4$	$4x = 12$
---------	-----------

$R - ?$	$x = 3 \Rightarrow a = 3$
---------	---------------------------

$$R = \frac{3\sqrt{4}}{2} \Rightarrow R = 3.$$

Ответ: 3 см.

Задача №4

Дан Пентеракт. Найдите гипердиагональ, при условии, что длина ребра 7.

Решение:

Дано:	Вычисления
$a = 7$	$L_n = 7\sqrt{5}$
$n = 5$	$\sqrt{5} \approx 2,236068 \Rightarrow$
$L_n - ?$	$L_n \approx 15,625476$

Ответ: $\sim 15,625476$

Симплексы

Симплекс – (от лат. «simplex» - простой). [2].Обобщенное название n -мерного треугольника. В геометрии, для простого понимания, перед слом «симплекс» ставится число мерности. Например, 3-симплекс (тетраэдр) и так далее. По формуле, можем найти гиперобъем n -симплекса с единичной стороной: $V_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n! \times 2^{n/2}}$. Так же существует формула гиперобъема

симплекса для стороны с любым значением a , где $a > 0$. $V_n = \frac{a^n}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}$

Так же мы можем найти гипервысоту по формуле $H_n = a \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}$, где n – мерность пространства.

Можем найти косинус двугранного угла по формуле $\cos \alpha = \frac{1}{n}$.

Задачи (часть 2)

Задача №1

Дан 4-симплекс с единичной стороной. Найдите гиперобъем этого симплекса.

Решение:

Дано:	Вычисления

$$n = 4 \quad V_n = \frac{\sqrt{4+1}}{4! \times 2 \times 4^{4/2}} \Rightarrow V_n = \frac{2,236}{768} = 0,0029114$$

$V_n - ?$

Ответ: 0,002911 см⁴

Задача №2

Дан 4-симплекс со стороной 3 см. Найдите гиперобъем этого симплекса

Решение

Дано:	Вычисления
$n = 4$	$V_n = \frac{27}{24} \sqrt{\frac{5}{8}} = 1,125 \times (\sim 0,7905) \approx 1$
$a = 3 \text{ см}$	
$V_n - ?$	

Ответ: $\sim 1 \text{ см}^4$

Задача №3

Дан 9-симплекс со стороной 4 см. Найдите гипервысоту этого симплекса.

Решение:

Дано:	Вычисление
$n = 9$	$H_n = 3 \sqrt{\frac{9+1}{18}} = 3 \times \frac{3,162}{4,242} \approx 2,236$
$a = 4 \text{ см}$	
$H_n - ?$	

Ответ: $\sim 2,236 \text{ см}^9$

Заключение.

Применение на практике

Мы знаем, что функция – это зависимость результата только от одного параметра. Если же что-то описывается более чем одним параметром, то оно описывается геометрически точками, линиями, фигурами, поверхностями в многомерных пространствах. Геометрия многомерных пространств – широко применяемый математический аппарат для наглядного представления, исследования и прогнозирования большинства реальных процессов. Тем более, изучение этой темы необходимо еще и для изучения квантовой механики и физики, согласно теории Розенфельда, гласящей о том, что квантовая механика и физика невозможна без применения множества различных пространств.

Список литературы и интернет ресурсов

1. ru.wikipedia.org, статья «Теория Калуцы –Клейна».

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%9A%D0%B0%D0%BB%D1%83%D1%86%D1%8B_%E2%80%94%D0%9A%D0%BB%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B0

2. ru.wikipedia.org, статья «Симплекс».

<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81>

3. ru.wikipedia.org, статья «Гиперкуб».

<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%BA%D1%83%D0%B1>

4. ru.wikipedia.org, статья «Размерность пространства».

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B0

5. Александров П.С. Комбинаторная топология. 1947, с. 660.

6. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. 1973. с. 576

7. Понтрягин П.С. Основы комбинаторной топологии. 1947. с. 142

8. R. Blei Analysis in integer and fractional dimensions. 2003. p. 556