

Научно-исследовательская работа

Математика

**«Алиquotные дроби при решении нестандартных задач»**

***Выполнила:***

*Животова Алина Денисовна*

Учащаяся 6 «Б» класса

МБОУ «Гимназии №41»

***Руководитель:***

*Ломонова Ольга Александровна*

учитель математики

МБОУ «Гимназии №41»

## Введение

Тема «Алиquotные дроби при решении нестандартных задач» является интересной темой для исследования дробей. Столкнувшись с этим термином впервые, понимаешь, почему в Древнем Египте математики «настоящими» дробями считали только алиquotные дроби.

### Цель исследования:

- Выяснить, какое значение имеют алиquotные дроби в нашей жизни.

### Задачи исследования:

- Узнать происхождение алиquotных дробей.
- Рассмотреть основные операции с алиquotными дробями.
- Решать олимпиадные задачи с помощью алиquotных дробей.
- Составлять и решать задачи практического содержания.

## Основная часть

### История алиquotных дробей

Алиquota - (лат. aliquoties, «несколько раз или несколько частей»)

Алиquotная дробь- дробь, числитель которой равен единице.

Алиquotные дроби начали использоваться ещё в древности. Необходимость в дробных числах возникла в результате практической деятельности человека. Потребность в нахождении долей единицы появилась у наших предков при дележе добычи после охоты. Второй существенной причиной появления дробных чисел следует считать измерение величин при помощи выбранной единицы измерения. [8]

Первые дроби, с которыми нас знакомит история, это дроби вида –  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$  – так называемые **единичные** дроби, так как числитель этих дробей единица. Причиной появления этих дробей являлась необходимость разбить единицу на доли. Это нужно было для того:

1. чтобы разделить добычу после охоты, ведь, нужно было знать, сколько частей составляет целое и кому какая часть добычи станет принадлежать.

2. выразить результат измерения длины, времени, площади, массы и вести расчеты за товары

### Аликвотные дроби в Древнем Египте

Аликвотные дроби появились раньше других дробей. В Древнем Египте математики «настоящими» считали только аликвотные дроби вида  $1/n$ .

Итак, дроби вида  $1/n$ , где числитель 1, а  $n$  – натуральное число, (т.е. число, которое используется для счёта предметов), называются **аликвотными дробями** (от латинского *aliquot*-«несколько») или **единичными**. [2]

В Древнем Египте «настоящими», математики, считали только аликвотные дроби. Поэтому каждую дробь стремились представить в виде суммы меньших аликвотных дробей, причём с разными знаменателями.

Например:  $8/15 = 1/3 + 1/5$ ,

$$1/2 = 1/3 + 1/6,$$

$$1/4 = 1/5 + 1/20,$$

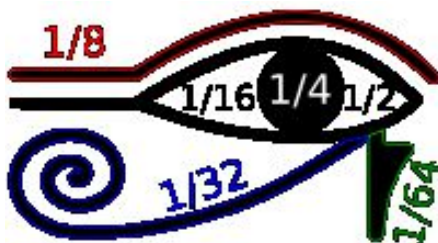
$$3/4 = 1/2 + 1/4,$$

$$2/11 = 1/6 + 1/66,$$

$$2/7 = 1/6 + 1/14 + 1/21,$$

$$2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$$

Кроме того, для единиц измерения емкостей и объемов использовался так называемый **глаз «Хора»**



Он представлял собой дробь  $63/64$ .

Так как, согласно мифам глаз Хора был выбит, а затем восстановлен на  $63/64$ .

Каждая часть глаза соответствовала определённой дроби и была представлена в виде суммы аликвотных дробей таким образом:

$$1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64=63/64$$

Аликвотные дроби встречаются в древнейших, дошедших до нас математических текстах, составленных более 5000 лет тому назад, – древнеегипетских папирусах и вавилонских клинописных табличках. Они нужны были для практических целей.[8]

Рассмотрим такую задачу: «Разделить 7 хлебов между 8 людьми» Если разрезать каждый хлеб на 8 частей, придется провести 49 разрезов (7 хлебов по 7 надрезов в каждом хлебе). А по-египетски эта задача решалась так:

$$7/8= 1/2+1/4+1/8$$

Значит, каждому человеку нужно дать половину хлеба, четверть хлеба и восьмушку хлеба. При этом, придется сделать почти в три раза меньше разрезов.

### **Значение аликвотных дробей в истории:**

Первое понятие дроби появилось в Древнем Египте много веков назад. В русском языке это слово появилось лишь в 8 веке от слов «дробить, разбивать, ломать на части», поэтому в первых учебниках дроби называли «ломанными числами». Современное обозначение дробей берет свое начало в Древней Индии, а дробная черта появилась в записи дробей лишь 300 лет назад, до этого ставили точку между числителем и знаменателем. Сами названия «числитель» и «знаменатель» ввел в употребление греческий ученый - математик Максим Плануд. [2]

Долгое время дроби считались самым трудным разделом математики. У немцев даже сложилась поговорка «Попасть в дроби», что означало оказаться в трудном положении.

### **Формулы аликвотных дробей**

Задачи с использованием аликвотных дробей составляют обширный класс нестандартных задач. Сюда относятся, прежде всего задачи, в которых требуется разделить какие-либо ресурсы на несколько частей с наименьшим

количеством действий. Для этого необходимо представить какое-либо число в виде суммы аликвотных дробей.[1]

Например:  $1/3 = 1/4 + 1/12,$

$$1/5 = 1/6 + 1/30,$$

$$1/8 = 1/9 + 1/72$$

Из данных примеров следует, что знаменатель первой дроби на 1 больше знаменателя данной дроби. Произведение же знаменателя первой дроби и знаменателя данной дроби соответствует знаменателю второй дроби.

Где  $n$  – знаменатель данной дроби является натуральным числом, тогда мы можем представить формулу в таком виде как:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

Доказать это равенство можно, приведя дроби к общему знаменателю и после сокращений увидеть, что формула верна.

Кроме того, следует отметить, что аликвотные дроби можно как складывать, так и вычитать.

Поэтому, разложить в виде **суммы** двух аликвотных дробей можно по формуле:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Если преобразовать формулу  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ ,

то получим следующие равенства:

$$\frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$$

Если разложить в виде **разности** двух аликвотных дробей по формуле:  $\frac{1}{n(n+1)} =$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)},$$

то мы увидим, что аликвотную дробь можно представить разностью двух аликвотных дробей, знаменателями которых являются последовательные числа равные их произведению.

Так, например:  $1/6 = 1/(2*3) = 1/2 - 1/3$

$$1/2 = 1/(1*2) = 1/1 - 1/2$$

$$1/56 = 1/(7*8) = 1/7 - 1/8$$

### Решение нестандартных задач

**№1.** Представить число 1 в виде сумм различных аликвотных дробей.[5]

**а) трёх слагаемых:**

$$1 = 1/2 + 1/2 = 1/2 + (1/3 + 1/6) = 1/2 + 1/3 + 1/6$$

**б) четырёх слагаемых:**

$$1 = 1/2 + 1/2 = 1/2 + (1/3 + 1/6) = 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1/2 + 1/3 + (1/7 + 1/42) = 1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/42$$

**в) пяти слагаемых:**

$$1 = 1/2 + 1/2 = 1/2 + (1/3 + 1/6) = 1/2 + (1/4 + 1/12) + (1/7 + 1/42) = 1/2 + 1/4 + 1/12 + 1/7 + 1/42$$

**г) шести слагаемых:**

$$1 = 1/2 + 1/2 = 1/2 + (1/3 + 1/6) = 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1/2 + (1/4 + 1/12) + (1/7 + 1/42) = 1/2 + 1/4 + 1/12 + ((1/8 + 1/56) + 1/42) = 1/2 + 1/4 + 1/12 + 1/8 + 1/56 + 1/42$$

**№2.** Представьте дробь  $1/2020$  в виде аликвотных дробей.[7]

Существует 2 способа представления дроби  $1/2020$  в виде суммы и один из них - в виде разности аликвотных дробей.

Это, опять-таки, из-за простоты числа 2020.

$$1/2020 = 1/2020 + 1/4082420 = 1/4040 + 1/4040 = 1/2019 - 1/4078380$$

**№3.** Найти сумму аликвотных дробей[6]

$$1/2 + 1/((2*3)) + 1/((3*4)) + 1/((4*5)) + \dots + 1/((19*20))$$

Решение: воспользуемся формулой для разложения аликвотной дроби в виде разности

$$1/2 = 1/((1*2)) = 1/1 - 1/2;$$

$$1/6 = 1/((2*3)) = 1/2 - 1/3;$$

$$1/12 = 1/((3*4)) = 1/3 - 1/4 \text{ и т.д.}$$

$$1/20 = 1/((4*5)) = 1/4 - 1/5;$$

$$1/380 = 1/((19*20)) = 1/19 - 1/20.$$

Подставив, уже разложенные выражения в сумму, получим:

$$1/1-1/2+1/2-1/3+1/3-1/4+\dots-1/19+1/19-1/20=1/1-1/20=19/20$$

$$1/2+1/((2*3))+1/((3*4))+1/((4*5))+\dots+1/((19*20))=19/20$$

Ответ: 19/20

**№4.** Найти сумму аликвотных дробей [6]

$$1/20+1/30+1/42+1/56+1/72+1/90+1/110+1/132$$

Решение: воспользуемся формулой для разложения аликвотной дроби в виде разности

$$1/20=1/(4*5)=1/4-1/5;$$

$$1/30=1/(5*6)=1/5-1/6;$$

$$1/42=1/(6*7)=1/6-1/7;$$

$$1/56=1/(7*8)=1/7-1/8;$$

$$1/72=1/(8*9)=1/8-1/9;$$

$$1/90=1/(9*10)=1/9-1/10;$$

$$1/110=1/(10*11)=1/10-1/11;$$

$$1/132=1/(11*12)=1/11-1/12$$

$$1/4-1/5+1/5-1/6+1/6-1/7+1/7-1/8+1/8-1/9+1/9-1/10+1/10-1/11+1/11-1/12=1/4-1/12=$$

$$(3-1)/12=2/12=1/6 \quad 1/20+1/30+1/42+1/56+1/72+1/90+1/110+1/132=1/6$$

Ответ: 1/6

**№5.** Решить уравнение [4]

$$(1/(25*26)+1/(26*27)+1/(27*28)+1/(28*29)+1/(29*30))*150+1,03:[10,3*(x-1)]=11$$

Решение: упростим уравнение и найдем сумму аликвотных дробей:

$$1/(25*26)+1/(26*27)+1/(27*28)+1/(28*29)+1/(29*30)$$

Представим каждую дробь в виде разности аликвотных дробей

$$1/(25*26)=1/25-1/26; \quad 1/(26*27)=1/26-1/27;$$

$$1/(27*28)=1/27-1/28;$$

$$1/(28*29)=1/28-1/29;$$

$$1/(29*30)=1/29-1/30;$$

$$1/25-1/26+1/26-1/27+1/27-1/28+1/28-1/29+1/28-1/29+1/29-1/30=1/25-1/30=(6-5)/150=1/150$$

$$1/(25*26)+1/(26*27)+1/(27*28)+1/(28*29)+1/(29*30)=1/150$$

После нахождения суммы, уравнение примет следующий вид

$$1/150*150+1,03:[10,3(x-1)]=11$$

$$1+1,03:[10,3(x-1)]=11$$

$$1,03:[10,3(x-1)]=10$$

$$[10,3(x-1)]=1,03:10$$

$$10,3(x-1)=0,103$$

$$x-1=0,01$$

$$x=1,01$$

Ответ: 1,01

**№6.** Найти сумму[3]

$$1/(10*11)+1/(11*12)+\dots+1/(98*99)+1/(99*100)=?$$

Чтобы найти решение данной задачи необходимо найти сумму

$$1/(1*2)+1/(2*3)+\dots+1/(98*99)+1/(99*100)=99/100$$

И вычесть из нее сумму

$$1/(1*2)+1/(2*3)+\dots+1/(8*9)+1/(9*10)=9/10$$

$$99/100-9/10=(99-90)/100=9/100=0,09$$

### Заключение

Таким образом, при разработке данной темы, я узнала, что первыми дробями, которыми оперировали люди, были аликвотные дроби.

Задачи с использованием аликвотных дробей составляют обширный класс нестандартных задач. Аликвотные дроби используются тогда, когда требуется что-то разделить на несколько частей с наименьшим количеством действий для этого.



Разложение дробей на две аликвотные дроби систематизировали в виде формулы, преобразовав которую, легко решили олимпиадные задачи по математике разных лет.

Решив проблему разложения аликвотных дробей на две аликвотные дроби, мы пришли к выводу, что разложение на три, четыре, пять и т.д. аликвотных дробей можно произвести, разложив одно из слагаемых на две дроби, следующее слагаемое еще на две аликвотные дроби и т.д.

Поэтому решения задач с применением аликвотных дробей – это занимательный процесс, развивающий мышление и логику, который помогает решать нестандартные и олимпиадные задачи по математике разных лет.

### **Список использованных источников и литературы**

1. Баженов И.И, А.Г.Порошкин А.Г. и др. Задачи для школьных математических кружков. - Сыктывкар, 1994.
2. Бородин А.И. Из истории арифметики, Головное издательство «Ваша школа» - К., 1986
3. Гаврилова Т.Д. Занимательная математика, 5-11классы. - Волгоград: Учитель, 2008.
4. Левитас Г.Г. Нестандартные задачи по математике. - М.: ИЛЕКСА, 2007.
5. Петерсон Л. Г. Математика, 5класс. – М.:Ювента, 2016.
6. Фарков А. В. Математические олимпиады в школе, 5-11классы. – М.: Айрис-пресс, 2012.
7. Фарков А.В. Математические олимпиады 5-6 классы.- М: Издательство «Экзамен». – М.:2019
8. Энциклопедический словарь юного математика для среднего и старшего школьного возраста, М.: Педагогика,1989.