

VIII Международный конкурс научно-исследовательских
и творческих работ учащихся
«Старт в науке»

Научно-исследовательская работа
Предмет
Математика

Тема работы
Представление многомерности пространств

Выполнил:

Рудченко Андрей Сергеевич,
учащийся 10А класса
Государственного бюджетного общеобразовательного учреждения
Московской области
«Одинцовский «Десятый лицей»

Руководители:

Иванова Светлана Владимировна
учитель математики высшей квалификационной категории,
Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение
Московской области
«Одинцовский «Десятый лицей»

и

Остапенко Любовь Владимировна
учитель математики высшей квалификационной категории,
Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение
Московской области
«Одинцовский «Десятый лицей»

Оглавление

Вступление.....	3
Актуальность исследования.....	3
Цель исследования.....	3
Задачи исследования.....	3
Объект и предмет исследования.....	3
Проблема исследования.....	4
Гипотезы исследования.....	4
Метод исследования.....	4
Обзор литературы и источников.....	4
Вклад автора работы в решение проблемы.....	8
Основная часть.....	9
Введение понятий многомерности пространств.....	9
Как видит наш глаз этот мир?.....	9
Представление двухмерной жизни.....	9
Построение простых фигур в разных пространствах.....	10
Элементы гиперкуба.....	13
Четырехмерная фигура в нашем трехмерном пространстве.....	14
Как выглядит пентеракт, гексеракт, гептеракт и октеракт?.....	14
Главные гипотезы многомерности пространств.....	15
Что будет, если у человека будет способность четвертого измерения?.....	16
Проекты, которые связаны с четвертым измерением.....	16
Заключение.....	17
Выводы.....	17
Теоретическая и практическая значимость исследования.....	17
Результаты.....	17
Используемые ресурсы.....	18

Вступление

Актуальность исследования

В настоящее время, когда определяют многомерность России, многомерность истории, многомерность отношений между Россией и США, многомерность времени, мы хотим дать математическое представление многомерности пространств. Человечество знает наличие двухмерного и трехмерного пространства. «Зачем нам знания о более сложных пространствах и о многомерности?», - спросите вы. Если мы будем знать и уметь применять знания и методы исследования на практике во многих областях деятельности – в физике, биологии, медицине, машиностроении, информационных технологиях, экономике, социологии, то у нас появятся новые возможности, открытия, технологии, новое будущее.

Цель исследования

N-мерное пространство, многомерное пространство, проблемы многомерности пространств исследуют математики, т. к. не все уравнения и функции можно решить и исследовать на системе координат плоскости и 3-мерного пространства. Поэтому наша цель изучить многомерность пространств, сделать выводы и определить области применения методов исследования многомерных пространств.

Задачи исследования

1. Изучение свойств многомерных пространств.
2. Изучение свойств фигур этих многомерных пространств.
3. Представление фигур в многомерных пространствах, которые нас окружают и нет.
4. Определить области применения методов исследования многомерных пространств.

Объект и предмет исследования

Объект нашего исследования – представление о пространствах.

Предмет исследования – многомерные пространства и представления многомерности пространств.

Проблема исследования

Проблема исследования – исследование того, что это нельзя почувствовать и увидеть. Мы можем логически опираться на умозаключения, определения и представления многомерности пространств.

Гипотезы исследования

Представления многомерности пространств позволяют развивать методы исследования во многих областях деятельности на основе представления многомерных данных, начиная с информационных технологий, анализа больших данных на основе искусственного интеллекта.

Метод исследования

1. Теоретические методы исследования;
2. Математический аппарат;
3. Логический аппарат;
4. Абстрагирование;
5. Анализ;
6. Синтез;
7. Идеализация.

Обзор литературы и источников

По теме о многомерном пространстве проанализировано 12 200 000 сайтов в интернете на английском языке и 2 950 000 сайтов на русском языке.

В базе научных публикаций Scopus по теме о многомерном пространстве проанализировано 15 742 публикации. По типу доступа: в

открытом доступе 1802 документа, 13940 другие. С 1920 г. по годам: 55 документов за 2020 г., 898 за 2019 г., 946 за 2018 г., 838 за 2017 г., 834 за 2016 г. Среди 105 авторов, наиболее публикуемых по теме (от 6 до 43 документов), больше всего документов опубликовали Melnikov, V.N. (43); Chinesta, F. (39); Ivashchuk, V.D. (35); Zhuk, A. (34); Xu, L. (28); Ammar, A. (24 документа). По отраслям знаний: по компьютерным технологиям (5 671), по математике (4 419), по проектированию (4 058), по физике (2 586), в области социальных наук (1 294 документа). По типам документов: 10 600 статей, 4 257 докладов конференций, 308 обзоров, 168 обзоров конференций. По стадиям публикации: 15 636 опубликованных статей, 106 статей в печати. По названиям источников: Lecture Notes In Computer Science, включая серии Lecture Notes In Artificial Intelligence и Lecture Notes In Bioinformatics (494); Proceedings Of SPIE, the International Society For Optical Engineering (228); Journal Of Chemical Physics (130); Journal Of Computational Physics (82 документов).

По ключевым словам: алгоритмы (1 319); оптимизация (710), многомерное пространство (655), многомерное масштабирование (651), компьютерное моделирование (587), математические модели (539), визуализация (539), многомерные данные (505), алгоритм (439), анализ главных компонент (372), обработка сигналов (371), распознавание

образов (369), контролируемое исследование (363), интеллектуальный анализ данных (352), решение задач (339), искусственный интеллект (338), визуализация данных (317), векторные пространства (317), векторы (309), системы баз данных (301), нейронные сети (297), методология (294), обработка изображений (290), кластерный анализ (278), алгоритмы кластеризации (276), Физиология(272), геометрия (266), матричная алгебра (258), структуры данных (248), принятие решений (245), численные методы (241), выделение признаков (231), классификация (информации) (230), редукция данных (227), генетические алгоритмы (222), системы обучения (219), оценка параметров (214), итерационные методы (212), семантика (212), анализ изображений (211), вычислительная сложность (207), вероятность (206), индексирование (информации) (204), классификация (203), деревья (математика) (203), топология (199), картографирование (189), многомерные системы (179), обработка данных (176), дистанционное зондирование (171), обработка запросов (170), обработка данных (167), интерполяция (167), проектирование (162), поиск информации (162), уменьшение размерности (161), методы пространства состояний (159), статистические методы (158), регрессионный анализ (153), теория аппроксимации (152), сегментация изображений (152), процедуры (151),

тензоры (148), магнитно-резонансная томография (146), статистика (146), цифровая память (145), вычислительные методы (143), химия (142), математические преобразования (141), алгоритмы обучения (140), кластеризация (139), информационные системы (139), оптимизация роя частиц (PSO) (139), теория множеств (139), биологическая модель (138), оценка (138), трехмерные (138), теория вычислений(133), многомерный анализ (133), квантовая теория (133), эволюционные алгоритмы (131), языки запросов (131), компьютерная графика (130), методы Монте-Карло (130), анализ данных (129), функции (126), сравнительное исследование (125), компьютерное зрение (125), улучшение изображения (124), моделирование (124), стохастические системы (124), теория графов (119), молекулярная динамика (119), прогнозирование (118), многочлены (118), наборы данных (117), восприятие (116), статистический анализ (116), анализ информации (115), марковские процессы (115), математические операторы (111), случайные процессы (111), цвет (110), модели биологические (105), восприятие пространства (105), спектральный анализ (105), нелинейные уравнения (104), прогнозирование (104), белки (104), динамика (103), реконструкция изображений (103), обработка информации (103), теория информации (в

103 документах). Ключевые слова определяют области применения методов исследования многомерных пространств.

По организациям, финансирующим спонсорам: National Natural Science Foundation of China (406); National Science Foundation (403); Российский фонд фундаментальных исследований (РФФИ) (138); National Institutes of Health (США, 119); Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (94 документа). По странам: США (4 556), Китай (1 548), Германия (1 105), РФ (1 038), Франция (949 документов). По типу источника: 11 007 статей в научных журналах, 3 538 докладов в материалах конференций, 906 документов в книжных сериях, 267 книг. По языкам: 14 955 документов на английском, 316 на китайском, 178 на русском, 60 на французском, 57 на испанском языке. Обзор литературы и источников определяет изученность темы.

Вклад автора работы в решение проблемы

1. Автором информация о представлении многомерности пространств представлена в виде математических формул, образно-графического моделирования, текстовой информации.
2. Автором представлены алгоритмы создания четырехмерного куба.
3. Автор предложил гипотезу многомерности пространств.
4. Автор определил области возможного использования методов исследования многомерных пространств.

Основная часть

Введение понятий многомерности пространств

По существу пространство может иметь бесконечное количество измерений – от нулевого измерения до целочисленного n -измерения. Каждое пространство имеет n -ое количество осей и каждое тело в пространстве имеет n координат, чтобы точно определить, где находится тело. То есть в нулевом пространстве не будет осей, а значит, телу смысла нет задавать координаты, т. к. оно будет находиться в одном и том же месте в 0 , то есть в одной точке. Следующее одномерное пространство определяется одной осью. Примерами одномерной оси могут служить ряд натуральных чисел, линейка, метка для бега или прыжков. Дальше идет двухмерное пространство или плоскость, которая задается двумя осями и двумя координатами. Примеры: декартова система координат, полотно для вышивки, экран монитора. Далее – трехмерное пространство, в котором мы находимся, задается тремя осями, и предмет можно задать тремя координатами. Примеры: наша вселенная или 3D графика.

Как видит наш глаз этот мир?

Наш мир, в котором мы находимся, называют трехмерным, потому что любой предмет можно задать тремя координатами: x , y , z или длина, ширина и высота. Но как мы видим наше трехмерное пространство? Видим мы двухмерно, то есть мы видим двухмерную проекцию трехмерного пространства. Наш глаз работает, как фотоаппарат, только фотоаппарат передает картинку на экран или фотографию, а наш глаз передает мозгу увиденную информацию. Если бы мы имели такую возможность, как трехмерное зрение, мы тогда могли заглядывать за предметы[1].

Представление двухмерной жизни

После того, как мы определили, как наш глаз видит этот мир, теперь надо представить, как бы придуманные нами существа жили и видели в более

простом пространстве. Возьмем двухмерное пространство. Наблюдая сверху, мы бы увидели для них невидимые предметы, их устройство мира и их строение тела.

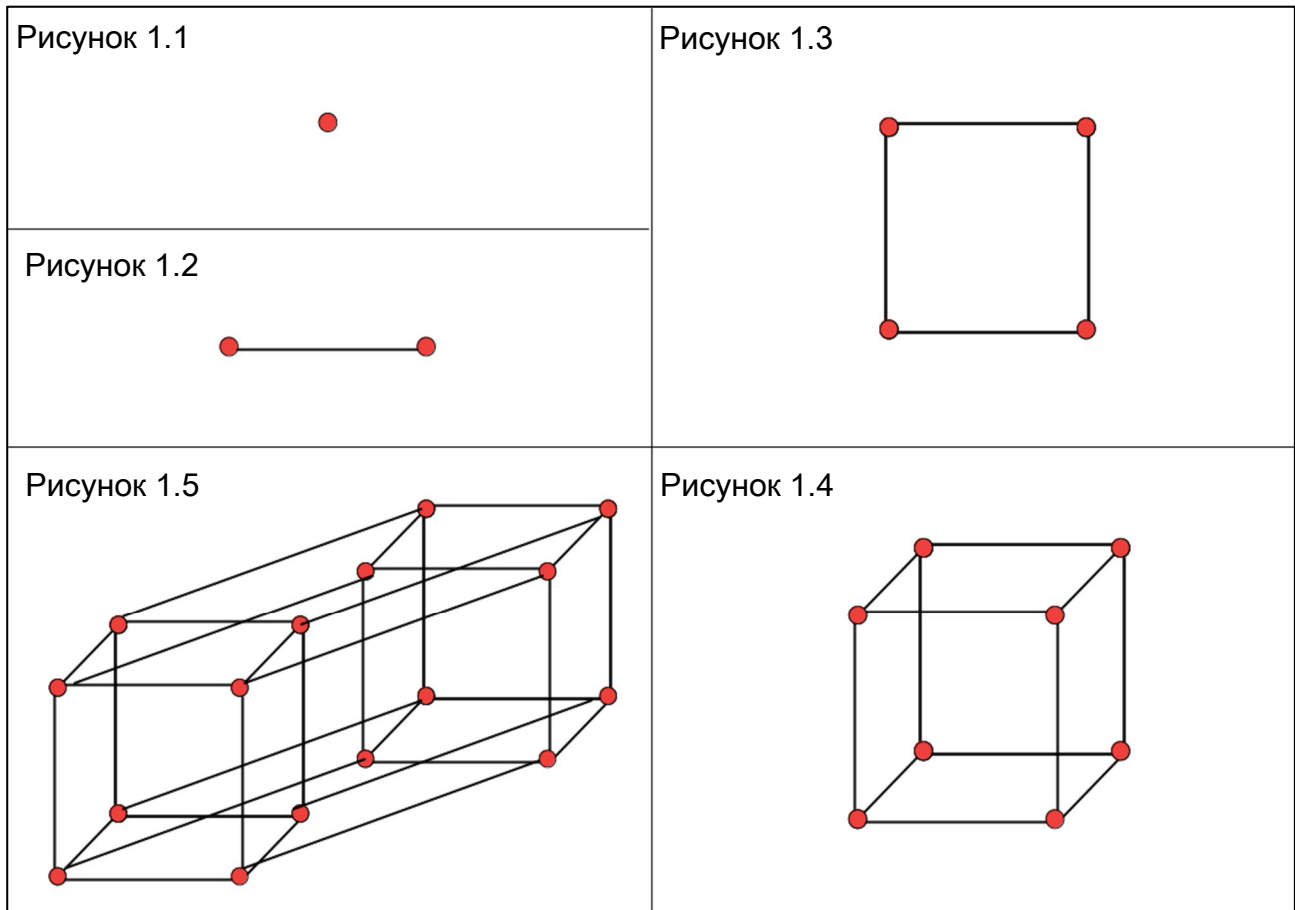
По аналогии с нами, они могут представлять двухмерно, но видеть будут одномерно, то есть одну линию. Попробуем пропустить через их двухмерное пространство, трехмерный куб. Они увидят удлиняющийся отрезок, а в их представлении это будет квадрат или треугольник переходящий в шестиугольник, в зависимости от того, как мы будем опускать данную простую фигуру.

Построение простых фигур в разных пространствах

Теперь уже перейдем к четырехмерному пространству и построим четырехмерную фигуру. Давайте построим четырехмерный гиперкуб *тессеракт*. Чтобы построить *тессеракт*, надо идти от простого к сложному. Мы можем построить материальную точку. Построим Рисунок 1.1. Следующее идет одномерное пространство. Из геометрии мы знаем, отрезок – это часть прямой, ограниченная двумя точками. Достроим из точки прямую. Получится Рисунок 1.2. После мы нарисуем такой же отрезок, который будет равен по длине и параллелен первому отрезку. Теперь их начало и концы соединим так, чтобы получился квадрат, как на Рисунке 1.3. Чтобы получить трехмерную фигуру, надо нарисовать такой же квадрат рядом с первоначально нарисованным, но только позади. Соединим вершины соответственно. Мы получили куб, изображенный на Рисунке 1.4. Рисунок 1.4 является двухмерной проекцией трёхмерной фигуры. Следующей фигурой будет гиперкуб. Если продолжить нашу алгоритмическую цепочку, то есть соединять вершину первой фигуры с вершиной второй фигуры соответственно, в данном случае мы будем соединять вершину одного куба с вершиной другого куба соответственно. После сделанного нами алгоритма мы получим четырехмерную фигуру - тессеракт, изображенный на Рисунке 1.5. Рисунок 1.5 является двухмерной проекцией трехмерной проекции четырехмерной фигуры.

Построение гиперкуба по методу «Вид сбоку», Рисунок 1.

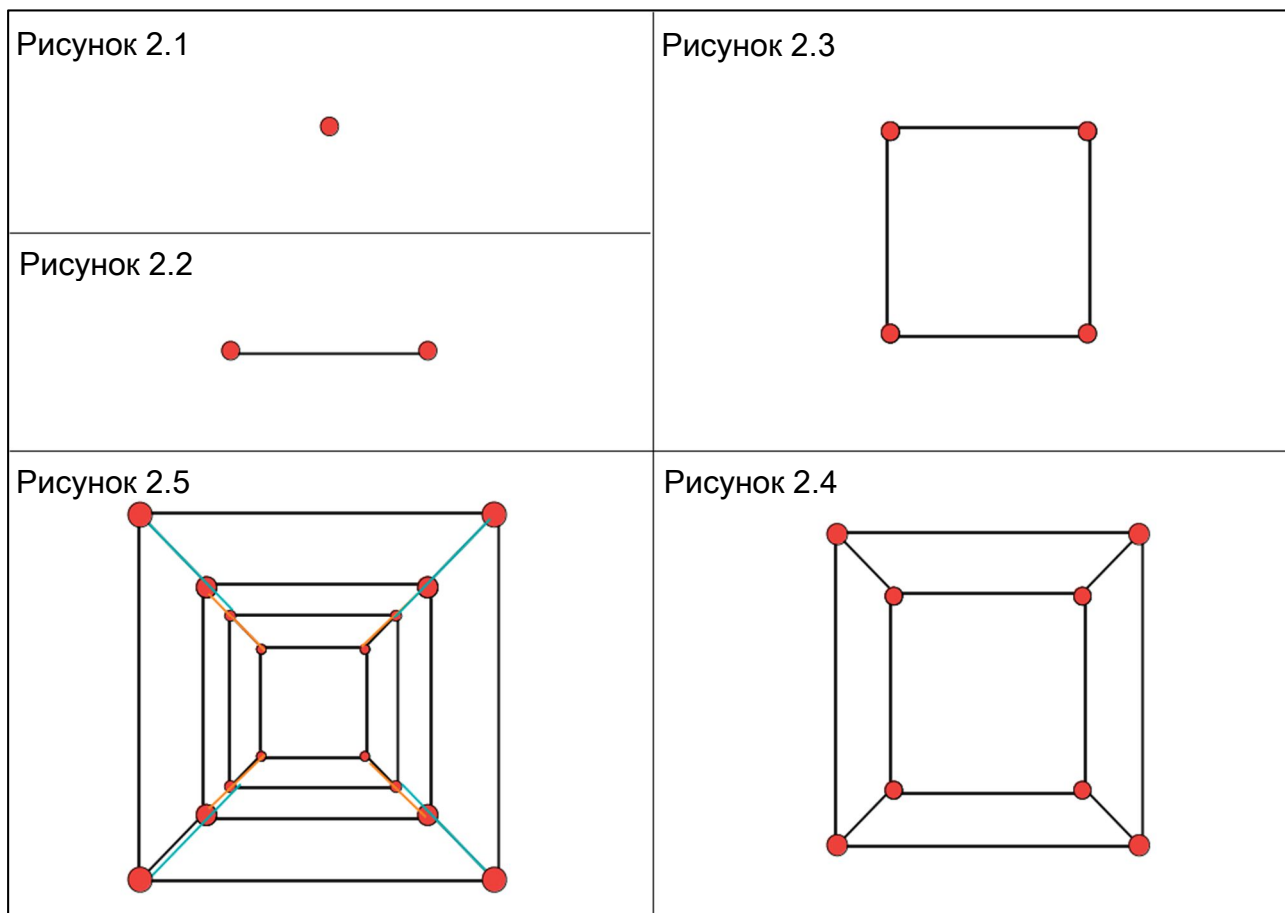
Рисунок 1.1 – точка (нулевое пространство). Рисунок 1.2 – отрезок (одномерное пространство). Рисунок 1.3 – квадрат (двухмерное пространство). Рисунок 1.4 – куб (трёхмерное пространство). Рисунок 1.5 – тессеракт (четырёхмерное пространство).



Наш глаз устроен так, что видит сначала передний план, а потом задний, а также для глаза передний план больше, чем задний план. Поэтому Рисунки 1.4 и 1.5 – это как бы фигуры, которые никогда не будут в таком положении для нашего глаза. Поэтому пойдём по алгоритму, первая фигура (составляющая будущей фигуры) будет передним планом, а вторая фигура будет задним планом, то есть первая фигура будет больше, чем вторая фигура. Начнём построение с фигуры, изображенной на Рисунке 2.3. Применяем данный и предыдущий алгоритмы и получим куб, изображенный на Рисунке 2.4. Строим гиперкуб, который получится, как на Рисунке 2.5. На Рисунке 2.5 помечены проведенные вершины, чтобы легче определить и представить, т. к. без выделения трудно будет найти куб в кубе.

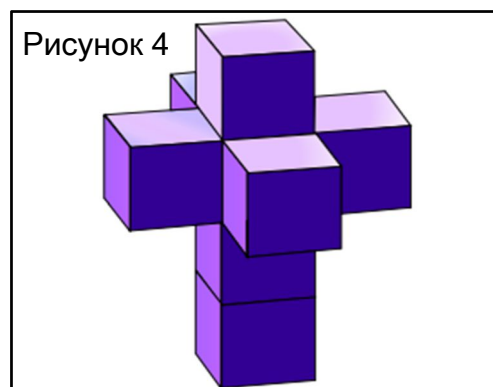
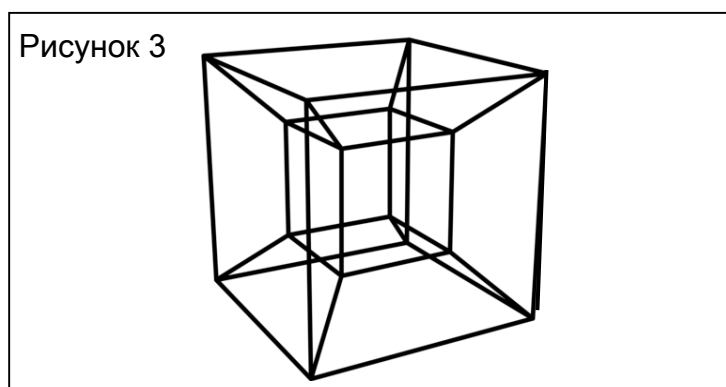
Построение гиперкуба по методу «Вид сверху», рисунок 2.

Рисунок 2.1 – точка (нулевое пространство). Рисунок 2.2 – отрезок (одномерное пространство). Рисунок 2.3 – квадрат (двухмерное пространство). Рисунок 2.4 – куб (трехмерное пространство). Рисунок 2.5 – тессеракт (четырёхмерное пространство).



На Рисунке 3 изображена трехмерная проекция тессеракта. На Рисунке 4 изображена развертка четырехмерного куба (тессеракта)

Если применять данный алгоритм, можно получить более сложные фигуры в более больших пространствах, например: пентеракт, гексеракт, гептеракт, октеракт, энееракт и т. д.



Элементы гиперкуба

Гиперкуб размерности n имеет $2n$ «сторон»: одномерная линия имеет 2 точки; двумерный квадрат – 4 стороны; трехмерный куб – 6 граней; четырехмерный тессеракт – 8 ячеек. Количество вершин (точек) гиперкуба равно 2^n (например, для куба – 2^3 вершин)[2].

Количество m -мерных гиперкубов на границе n -куба равно

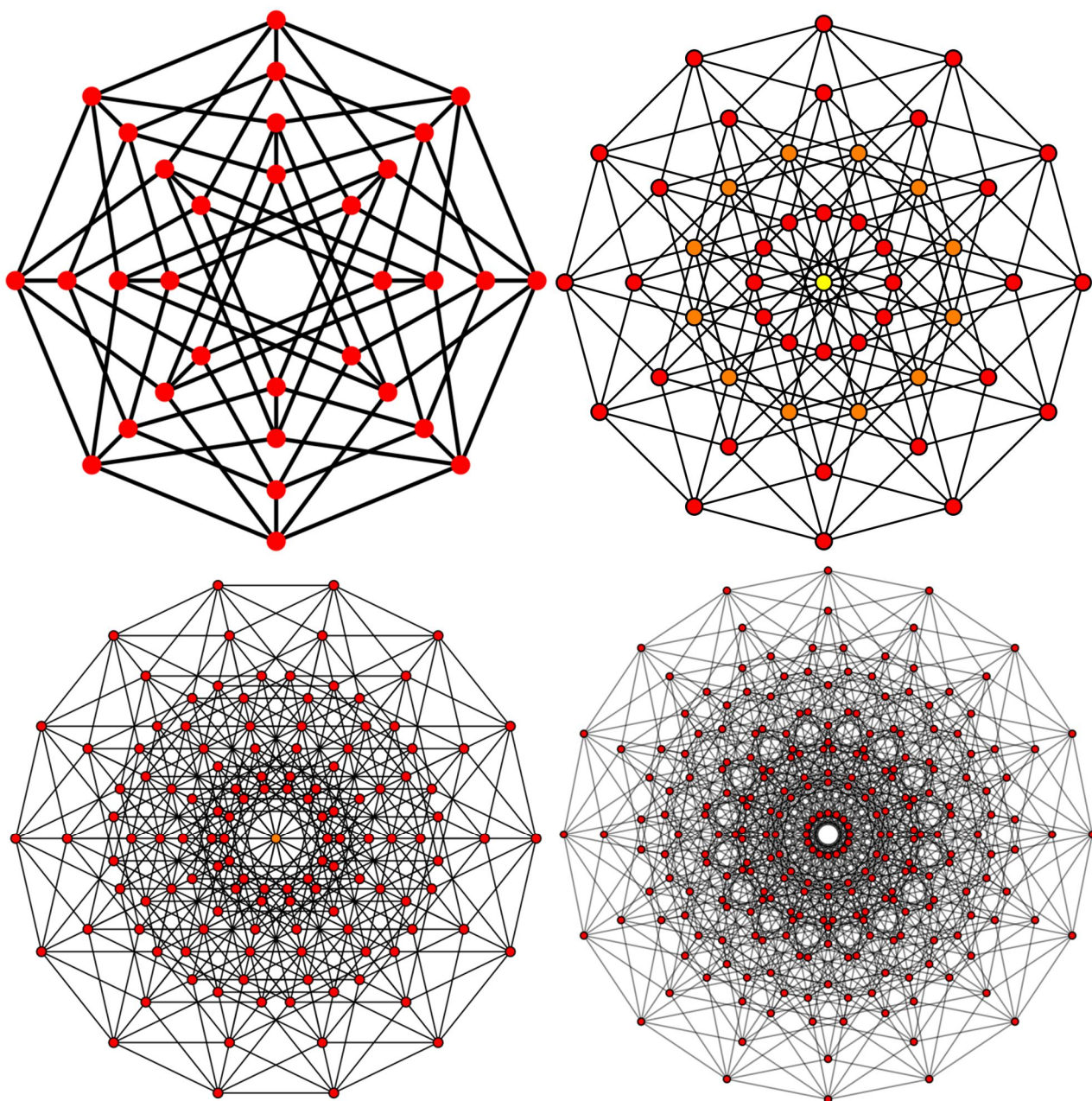
$$2^{n-m} \binom{n}{m}$$

n-куб	Название	Вершина (0-грань)	Ребро (1-грань)	Грань (2-грань)	Ячейка (3-грань)	4-грань	5-грань	6-грань	7-грань	8-грань	9-грань
0-куб	Точка	1									
1-куб	Отрезок	2	1								
2-куб	Квадрат	4	4	1							
3-куб	Куб	8	12	6	1						
4-куб	Тессеракт	16	32	24	8	1					
5-куб	Пентеракт	32	80	80	40	10	1				
6-куб	Гексеракт	64	192	240	160	60	12	1			
7-куб	Гептеракт	128	448	672	560	280	84	14	1		
8-куб	Октеракт	256	1024	1792	1792	1120	448	112	16	1	
9-куб	Эннеракт	512	2034	4608	5376	4032	2016	672	144	18	1

Четырехмерная фигура в нашем трехмерном пространстве

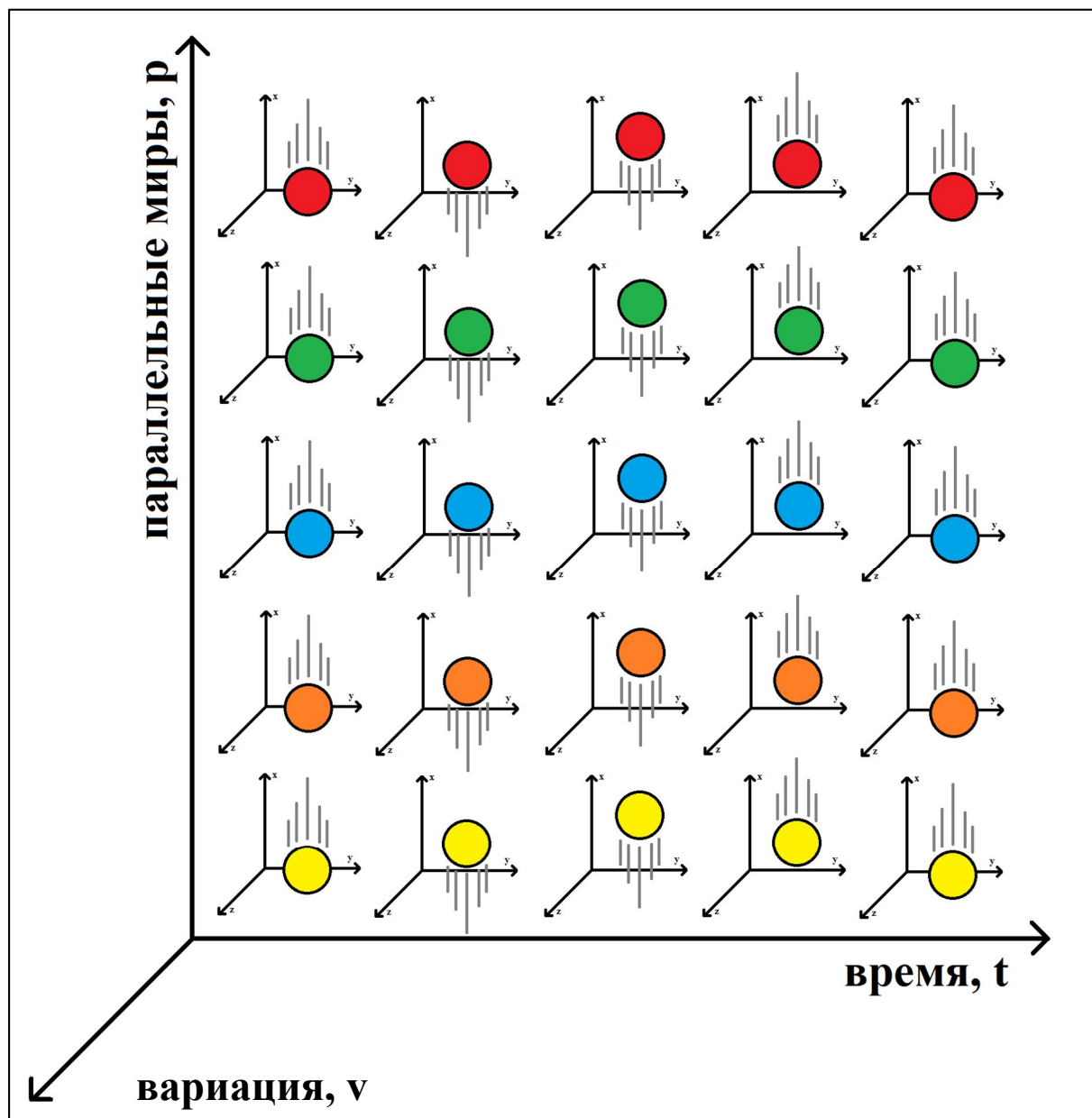
Мы рассмотрели простую фигуру четырехмерного пространства – тессеракт. Как бы мы увидели данную фигуру в трехмерном пространстве? В нашем пространстве появилась бы сначала маленькая точка, которая бы постоянно увеличивалась до своего максимума, потом уменьшаться, а далее вовсе пропала. Как уже мы следили за нашими вымышленными существами, также могут следить четырехмерные существа за нами, если бы они существовали или существуют.

Как выглядит пентеракт, гексеракт, гептеракт и октеракт?



Главные гипотезы многомерности пространств

Многие исследователи определяют, что четвертое измерение – это время. Другие говорят, что четвертое измерение – это параллельные миры (вселенные). Больше исследователей придерживается первого утверждения. Я считаю, что четвертое, пятое и даже шестое измерение можно классифицировать.



На Рисунке 6 представлена моя гипотеза – классификация четвертого, пятого и шестого измерений. Четвертым измерением будем считать время. Серыми линиями показано движение предмета. Пятым измерением будут параллельные миры.

На Рисунке 6 по оси «параллельные миры» изображены шарики разных цветов, что значит, разные тела могут находиться в одном и том же положении, но в разных пространствах. Шестым измерением будет вариация происходящего. Что это значит? Мы не раз задаем вопрос: «Что было бы, если бы я сделал это?» или «Что было бы, если я не делал этого?». То есть вариация происходящего – это наша свобода действий и непредсказуемость. Последовательность 4-оси, 5-оси, 6-оси может быть в другом порядке, т. к. нельзя определить, где у пространства длина, ширина и высота. Отсюда следует, что также нельзя определить, где находится «время», «параллельные миры» и «вариации происходящего».

Что будет, если у человека будет способность четвертого измерения?

Есть 3 варианта. 1-й вариант – способность перемещаться между параллельными мирами. 2-й вариант – способность перемещаться во времени. 3-й вариант – способность перемещаться во времени и между параллельными мирами, но это будет считаться способностью четвертого и пятого измерений.

Проекты, которые связаны с четвертым измерением

1. Miegakure – игра, которая призвана показать работу глаз, воспринимающих четвертое измерение, как «параллельные миры, длится уже больше семи лет, и считается уже закрытым проектом[[3](#)]. Жанр игры – логика. С помощью данной игры, нам было бы легче понять устройство четвертого пространства. Трейлер данной игры показывает все свойства и представление четвертого пространства, о которых я вам ранее рассказывал.
2. VR HypercubeGame – не совсем игра, данный проект является трехмерной проекцией четырехмерного тессеракта в виртуальной реальности.
3. MagicCube 4D – игра, задача которой, собрать четырехмерный куб[[4](#)][[5](#)].
4. Tetraspace – игра, похожая на Miegakure, но в отличие от нее Tetraspace существует, геймплей похожий. Жанр игры – логика. Есть демо-версия[[6](#)].
5. 4DToys – игра как демонстрация четырехмерного измерения, а именно демонстрации трехмерной проекции четырехмерных фигур[[7](#)].

Заключение

Выводы

Мы выяснили:

- как видит глаз наше пространство;
- как строить простые фигуры в пространствах бо'льших измерений;
- со свойствами и особенностями пространств;
- с гипотезами о четвертом измерении;
- с моей гипотезой о классификации четвертого, пятого и шестого измерений;
- как будем видеть мы четырехмерное пространство;
- что будет, если мы сможем иметь способность преодолевать четвертое измерение.

Теоретическая и практическая значимость исследования

Данные знания могут быть применены в математике, а именно в исследование функций и уравнения с четырьмя и более переменными. Также это исследование может помочь в архивации данных, что поможет сэкономить места на носителях. В области физики мы сможем преодолевать время и пространство или параллельные миры. От реальности до представленной фантастики – один шаг.

Ключевые слова исследованной литературы и источников определяют области применения методов исследования многомерных пространств.

Результаты

Мы предложили представление многомерности пространства. Надеемся, данное исследование вдохновит глубже изучать тему, создать на практике, о чем мечтали и писали фантасты: о путешествии во времени или о путешествии между параллельными мирами.

Используемые ресурсы

1. 4D Toys: коробка четырехмерных игрушек (для iOS и Vive)
<https://www.youtube.com/watch?v=0t4aKJuKP0Q&t=190s> Дата доступа:
29.11.2019
2. Cracking the 4D Rubik's Cube with simple 3D tricks URL:
<https://www.youtube.com/watch?v=yhPH1369OWc> Дата доступа: 29.11.2019
3. Designing a 4D World: The Technology behind Miegakure [Hide&Reveal] URL:
<https://www.youtube.com/watch?v=vZp0ETdD37E&t=38s> Дата доступа:
29.11.2019
4. TetraSpace – Full Walk through
URL:<https://www.youtube.com/watch?v=TA5SR7TlJe0> Дата доступа:
29.11.2019
5. Solving the 4D Rubik's Cube URL: <https://www.youtube.com/watch?v=0AqMb-edXlc> Дата доступа: 29.11.2019
6. Гиперкуб URL: <https://im-possible.info/russian/articles/hypercube/> Дата
доступа: 29.11.2019
7. Исследуем другие измерения – Алекс Розенталь и Джордж Зейден URL:
<https://www.youtube.com/watch?v=C6kn6nXMWF0> Дата доступа: 29.11.2019.