СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Чебакова С.Ю.

с. Ягодное Томской обл., МБОУ СОШ, 8 класс

Руководитель: Никонов Е.П., учитель математики, МБОУ СОШ, с. Ягодное Томской обл.

«Скажи мне, и я забуду,
покажи мне, и я запомню,
вовлеки меня, и я научусь».
Конфуций

Квадратные уравнения изучают в 8 классе. Умение решать их совершенно необходимо, поскольку решения квадратного уравнения – это базовая тема школьного курса математики. Умение решать квадратные уравнения нам пригодятся всегда, и особенно, при подготовке к ГИА и ЕГЭ, а так же к решению квадратных уравнений сводятся решения дробно-рациональных уравнений и текстовых задач. В учебниках по алгебре рассматриваются только три способа решения квадратных уравнений, но как они решались раньше? Все это заинтересовало меня, и поэтому для своей исследовательской работы выбрала тему «Способы решения квадратных уравнений», которая посвящена исследованию способов решения квадратных уравнений.

Предметом исследования являются квадратные уравнения. Цель – выявление способов решения квадратных уравнений, узнать можно ли решить любое квадратное уравнение данными способами и выявить особенности и недостатки этих способов, ознакомиться с историей развития данной темы.

Задачи: подобрать информацию по данной теме из учебников, письменных источников и сети Интернет; узнать можно ли решить любое квадратное уравнение со всеми способами; выявить, особенности и недостатки этих способов решения квадратных уравнений; исследовать историю развития данной темы в математике.

Для этого я изучила историю и теорию, о которых я излагаю в первой и во второй частях.

Изучив теорию, я выдвинула гипотезу, любое квадратное уравнение можно решить всеми способами.

История возникновения квадратных уравнений

Алгебра возникла в связи с решением разнообразных задач при помощи уравнений. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до н.э. вавилоняне. Найденные древние вавилонские глиняные таблички, датированные где-то между 1800 и 1600 годами до н.э., являются самыми ранними свидетельствами об изучении квадратных уравнений. На этих же табличках изложены методы решения некоторых типов квадратных уравнений. Правило решения $x^2 + x = ¾$; $x^2\text{-}x = 14{,}5$ таких уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадают с современным, однако неизвестно, каким образом дошли они до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены. Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилоне, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений разных степеней. При составлении уравнений Диофант для упрощения решения умело выбирает неизвестные. Вот, к примеру, одна из его задач.

Задача 2. «Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение – 96».

Диофант рассуждает следующим образом: из условия задачи вытекает, что искомые числа не равны, так как если бы они были равны, то их произведение равнялось бы не 96, а 100. Таким образом, одно из них будет больше половины их суммы, т.е. $10 + x$. Другое же меньше, т.е. $10 - x$. Разность между ними $2x$. Отсюда уравнение:

$$(10 + x)(10 - x) = 96, \text{ или же } 100 - x2 = 96.$$

Отсюда $x = 2$. Одно из искомых чисел равно 12, другое 8. Решение $x = -2$ для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа. Если решить эту задачу, выбирая в качестве неизвестного одно из искомых чисел, то можно прийти к решению уравнения: $y\,(20\text{-}y) = 96$

$$y2 - 20y + 96 = 0$$

Ясно, что, выбирая в качестве неизвестного полуразность искомых чисел, Диофант упрощает решение; ему удается свести задачу к решению неполного квадратного уравнения.

Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в 499 г. В Древней Индии были распространены публичные соревнования в решении трудных задач. В одной из старинных индийских книг говорится по поводу таких соревнований следующее: «Как солнце блеском своим затмевает звезды, так ученый человек затмит славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». Часто они были в стихотворной форме. Вот одна из задач знаменитого индийского математика 12 века Бхаскары:

Обезьянок резвых стая
Всласть поевши, развлекалась
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А 12 по лианам….
Стали прыгать повисая.
Сколько было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?

Решение Бхаскары свидетельствует о том, что он знал о двузначности корней квадратных уравнений: $(x/8)^2 + 12 = x$. Решая, получил корни.

Бхаскара пишет под видом:

x2 – 64x = – 768 и, чтобы дополнить левую часть этого уравнения до квадрата, прибавляет к обеим частям 322, получая затем:

$$x2 - 64x + 322 = -768 + 1024$$

$$(x - 32)2 = 256$$

$$x - 32 = \pm 16$$

$$x1 = 16,\ x2 = 48.$$

Квадратные уравнения в Европе 13-17 вв. Формулы решения квадратных уравнений в Европе были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202 году итальянским математиком Леонардом Фибоначчи. Эта книга способствовала распространению алгебраических знаний не только в Италии, но и Германии, Франции и других странах Европы. Многие задачи из этой книги переходили почти во все европейские учебники 14-17 веков. Общее правило решения квадратных уравнений вида $x^2 + bx = c$ было сформировано в Европе лишь в 1544 году Штифелем. Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Итальянские математики 16 века. Учитывают помимо положительных, и отрицательные корни. Лишь в 17 веке благодаря трудам Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принимает современный вид.

В алгебраическом трактате Аль-Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:

1. «Квадраты равны корням», т.е. ax2 = bx.
2. «Квадраты равны числу», т. е. ax2 = c.
3. «Корни равны числу», т.е. ax = c.
4. «Квадраты и числа равны корням», т.е. ax2 + c = bx.
5. «Квадраты и корни равны числу», т.е. ax2 + bx = c.
6. «Корни и числа равны квадратам», т.е. bx + c = ax2.

Его решение, конечно, не совпадает полностью с нашим. При решении полных квадратных уравнений Аль-Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем их геометрические доказательства. Приведем пример.

Задача 4. «Квадрат и число 21 равны 10 корням. Найти корень» (подразумевается корень уравнения x2 + 21 = 10x).

Решение: раздели пополам число корней, получишь 5, умножь 5 само на себя, от произведения отними 21, останется 4. Извлеки корень из 4, получишь 2. Отними 2 от 5, получишь 3, это и будет искомый корень. Или же прибавь 2 к 5, что даст 7, это тоже есть корень. Трактат Аль-Хорезми является первой, дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения.

На рубеже XVI–XVII вв. алгебра как специфическая часть математики, обладающая своим предметом, методом, областями приложения, была уже сформирована. Дальнейшее ее развитие, вплоть до нашего времени, состояло в совершенствовании методов, расширении области приложений, уточнении понятий и связей их с понятиями других разделов математики.

Методы и способы решения квадратных уравнений

Квадратным уравнением называется уравнение в $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная, a, b и c-некоторые числа, причем, $a \neq 0$.

Корень такого уравнения – это значение переменной x, обращающее квадратный трёхчлен в ноль, то есть значение, обращающее квадратное уравнение в тождество.

Коэффициенты квадратного уравнения имеют собственные названия: коэффициент a называют *первым* или *старшим*, коэффициент b называют *вторым* или *коэффициентом при x*, c называется *свободным членом* этого уравнения.

Приведённым называют квадратное уравнение, в котором *старший* коэффициент равен единице. Такое уравнение может быть получено делением всего выражения на старший коэффициент a: $x^2 + px + q = 0$, $p = b/a$, $q = c/a$.

Полным квадратным уравнением называют такое, все коэффициенты которого отличны от нуля ($a, b, c \neq 0$).

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или с равен нулю, то такое уравнение называют неполным квадратным уравнением.

Неполные квадратные уравнения бывают трёх видов:

1) $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$;
2) $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$;
3) $ax^2 = 0$.

И решаются следующим образом:

1) $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$;
$ax^2 = -c$
$x^2 = -c/a$ при условии, что $-c/a > 0$,
$x = \pm\sqrt{-c/a}$
Ответ: $x = \pm\sqrt{-c/a}$
2) $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$;
$x(ax + b) = 0$
$x = 0$ или $ax + b = 0$
$x = -b/a$
Ответ:0; $-b/a$
3) $ax^2 = 0$
$x^2 = 0$, $x = 0$.
Ответ:0.

В дальнейшем рассмотрим решение полных квадратных уравнений.

Разложение левой части уравнения на множители

С помощью разложения левой части уравнения множителей решим следующее уравнение $x^2 + x - 30 = 0$.

Разложим на множители левую часть:

$x^2 + x - 30 = x^2 + 6x - 5x - 30 = x(x + 6) - 5(x + 6) = (x + 6)(x - 5)$.

$(x + 6)(x - 5) = 0$
$x + 6 = 0$ или $x - 5 = 0$
$x = -6$ $x = 5$
Ответ: $x_1 = -6$, $x_2 = 5$.

Метод выделения полного квадрата

Данным методом решим уравнение $x^2 + 4x - 21 = 0$

Выделим в левой части полный квадрат. Для этого запишем выражение $x^2 + 4x$ в следующем виде: $x^2 + 4x = x^2 + 2\cdot x\cdot 2$.

В полученном выражении первое слагаемое – квадрат числа x, а второе – удвоенное произведение x на 2. поэтому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 2^2, так как $x^2 + 2\cdot x\cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2$.

Преобразуем теперь левую часть уравнения $x^2 + 4x - 21 = 0$, прибавляя к ней и вычитая 2^2. Имеем:

$x^2 + 4x - 21 = x^2 + 2\cdot x\cdot 2 + 2^2 - 2^2 - 21 = (x + 2)^2 - 4 - 21 = (x + 2)^2 - 25$ таким образом, данное уравнение можно записать так: $(x + 2)^2 - 25 = 0$, т.е. $(x + 2)^2 = 25$. Следовательно, $x + 2 = 5$, $x_1 = 3$, или $x + 2 = -5$, $x_2 = -7$.

Решение квадратных уравнений по формуле

Вывод формулы:

Умножим обе части уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, на $4a$ и следовательно имеем:

$$4a^2x^2 + 4abc + 4ac = 0.$$

$$((2ax)^2 + 2ax\cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

правую часть обозначим через D и получим

$$D = b^2 - 4ac.$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ иначе } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

попробуем решить уравнения:

а) $4x^2 + 7x + 3 = 0$.

$$a = 4,\ b = 7,\ c = 3,\ D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4\cdot 4\cdot 3 = 49 - 48 = 1,\ D > 0;$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},\ x = \frac{-7 \pm 1}{8},\ x = \frac{-7 + 1}{8},$$

$$x_1 = -\frac{3}{4},\ x = \frac{-7 - 1}{8},\ x_2 = -1.$$

Таким образом, в случае положительного дискриминанта, т.е. при $b^2 - 4ac \geq 0$ уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня.

б) $4x^2 - 4x + 1 = 0$,

$$a = 4,\ b = -4,\ c = 1.\ D = b^2 - 4ac =$$

$$= 16 - 4\cdot 4\cdot 1 = 0,\ D = 0;$$

$$x = -\frac{b}{2a},\ x = -\frac{-4}{2\cdot 4},\ x = \frac{1}{2}.$$

Итак, если дискриминант равен нулю, т.е. $= b^2 - 4ac = 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень, $x = -\dfrac{b}{2a}$

в) $2x^2 + 3x + 4 = 0$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $D = b^2 - 4ac = 9 - 4\cdot 2\cdot 4 = 9 - 32 = -13$, $D < 0$.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ не имеет смысла, иначе говоря, уравнение не имеет корней.

Итак, если дискриминант отрицателен, т.е. $= b^2 - 4ac < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней.

Исходя из этих исследований, о корнях квадратного уравнения можно судить по знаку дискриминанта (D):

– $D > 0$ – уравнение имеет два различных корня

– $D = 0$ – уравнение имеет один корень

– $D < 0$ – уравнение не имеет корней.

Корни квадратного уравнения при четном b

Для уравнений вида $ax^2 + 2kx + c = 0$, то есть при чётном b, где $k = b/2$ для нахождения корней можно использовать эквивалентное выражение

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{(2k)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} =$$

$$\frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{2(-k \pm \sqrt{k^2 - ac})}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Для *приведённого* квадратного уравнения эта формула принимает вид:

$$x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - c}\,.$$

Также при чётном b удобнее вычислять значение не целого дискриминанта, а его четверти:

$$\frac{D}{4} = \frac{(2k)^2 - 4ac}{4} = \frac{4(k^2 - ac)}{4} = k^2 - ac$$

или, если уравнение приведённое: $D/4 = k^2 - c$. Все необходимые свойства при этом сохраняются: $D/4 > 0 \Rightarrow D > 0$

Например: приведенное квадратное уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$, $k = -2:2 = -1$, $D = (-1)^2 - (-3) = 4$, $D > 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Подобным преобразованиям можно подвергнуть формулу для нахождения единственного корня при $D = 0$: $x = \dfrac{-2k}{2a} = \dfrac{-k}{a}$. Обратите внимание, что для приведённого уравнения можно упростить расчёт следующим образом: $x = -k$.

Например: $x^2 - 2x + 1 = 0$, $k = -2:2 = -1$, $D = (-1)^2 - 1 = 0$, $D = 0$, $x = 1$.

Отсюда следует важное и полезное правило: *корнем приведённого уравнения с чётным вторым коэффициентом и равным нулю дискриминантом является половина второго коэффициента*. Эти выражения является более удобным для практических вычислений при чётном b.

Решение уравнений с использованием теоремы Виета (прямой и обратной)

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид

$$x^2 + px + q = 0. \qquad (1)$$

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при а = 1 имеет вид

$$\begin{cases} x_1 x_2 = q \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Отсюда можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней).

а) Если свободный член q приведенного уравнения (1) положителен ($q > 0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависит от второго коэффициента p. Если $p > 0$, то оба корня отрицательные, если $p < 0$, то оба корня положительны.

Например:

$x^2 - 5x + 4 = 0$; $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$, так как $q = 4 > 0$ и $p = -5 < 0$;

$x^2 + 3x + 2 = 0$; $x_1 = -2$ и $x_2 = -1$, так как $q = 2 > 0$ и $p = 3 > 0$.

б) Если свободный член q приведенного уравнения (1) отрицателен ($q < 0$), то уравнение имеет два различных по знаку корня, причем больший по модулю корень будет положителен, если $p < 0$, или отрицателен, если $p > 0$.

Например:

$x^2 + 5x - 14 = 0$; $x_1 = -7$ и $x_2 = 2$, так как $q = -14 < 0$ и $p = 5 > 0$;

$x^2 - 7x - 18 = 0$; $x_1 = 9$ и $x_2 = -2$, так как $q = -18 < 0$ и $p = -7 > 0$

Теорема Виета для квадратного уравнения $ax^2 + вx + c = 0$ имеет вид

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Например: $2x^2 + 5x - 3 = 0$; $x_1 = -3$ и $x_2 = 0,5$, то есть $x_1x_2 = -3\cdot 0,5 = -1,5 = -3 : 2$ и $x_1 + x_2 = -3 + 0,5 = -2,5 = -5 : 2$.

Справедлива и теорема, обратная теореме Виета.

Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, то x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Эта теорема позволяет в ряде случаев находить корни квадратного уравнения без использования формулы корней.

Решим уравнение $x^2 + x - 30 = 0$. Попробуем найти два числа x_1 и x_2, такие, что

$$x_1 + x_2 = -1$$

$$x_1x_2 = -30$$

Такими числами являются –6 и 5. По теореме, обратной теореме Виета, они являются корнями данного квадратного уравнения.

Решение уравнений способом «переброски»

Решим уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Умножим обе части уравнения на a, получим $a^2\ x^2 + abx + ac = 0$. Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$. Тогда $y^2 + by + ac = 0$. Его корни y_1 и y_2. Окончательно $x_1 = y_1/a$, $x_1 = y_2/a$.

Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$ перебросим коэффициент 2 к свободному члену: $y^2 - 11y + 30 = 0$.

Согласно теореме Виета $y_1 = 5$ и $y_2 = 6$ то тогда $x_1 = 5/2 = 2,5$ и $x_2 = 6/2 = 3$.

Свойства коэффициентов квадратного уравнения

Если $a + b + c = 0$, то $x_2 = 1$, $x_2 = c/a$

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$ ⇨ $1 + 6 - 7 = 0$ ⇨ Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -7/1 = -7$.

Если $a + c = b$, то $x_2 = -1$, $x_2 = -c/a$

Решим уравнение $2x^2 + 3x + 1 = 0$ ⇨ $1 + 2 = 3$ ⇨ Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -1/2 = -0,5$.

Графическое решение квадратного уравнения

Если в уравнении $x^2 + px + q = 0$ перенести второй и третий члены в правую часть, то получим $x^2 = -px - q$.

Построим графики зависимостей $y = x^2$ и $y = -px - q$.

График первой зависимости – парабола, проходящая через начало координат. График второй зависимости – прямая.

Возможны следующие случаи:

– прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;

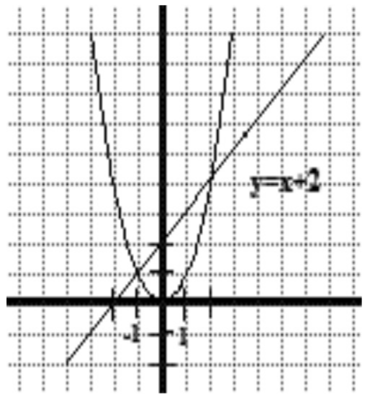
– прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;

– прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.

1) Решим уравнение $x^2 - x - 2 = 0$, запишем уравнение в виде $x^2 = 2 + x$ и в одной системе координат построим график функции $y = x^2$ и график функции $y = x + 2$.

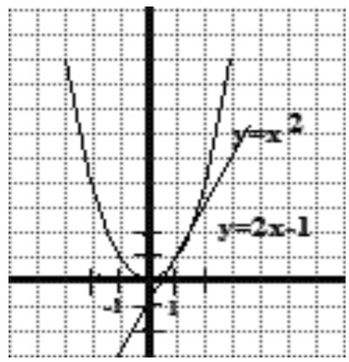
Обозначив абсциссы точек пересечения получим ответ.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.



2) Решим уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$, запишем уравнение в виде $x^2 = 2x - 1$ и в одной системе координат построим график функции $y = x^2$ и график функции $y = 2x - 1$. Обозначив абсциссу точки касания получим ответ.

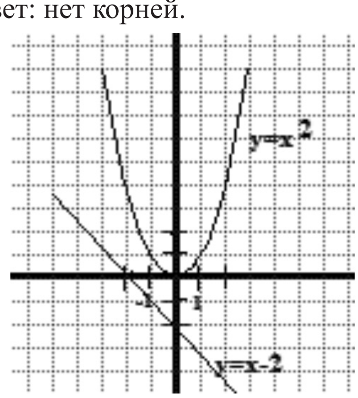
Ответ: $x = 1$.



3) Решим уравнение $x^2 - x + 2 = 0$, запишем уравнение в виде $x^2 = x - 2$ и в одной системе координат построим график функции $y = x^2$ и график функции $y = x - 2$.

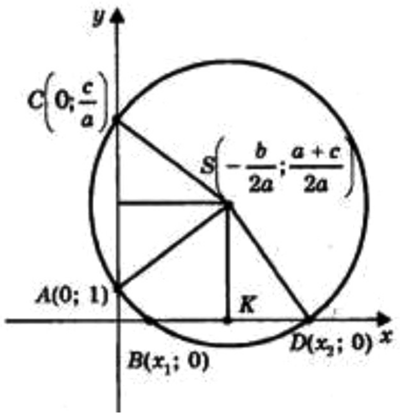
Графики данных функций не пересекаются.

Ответ: нет корней.



Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Решим уравнение $ax^2 + bx + c = 0$:
– Построим точки S(-b:2a,(a + c):2a) – центр окружности и точку A(0,1)
– Провести окружность радиуса SA
– Абсциссы точек пересечения с осью Ox есть корни исходного уравнения.

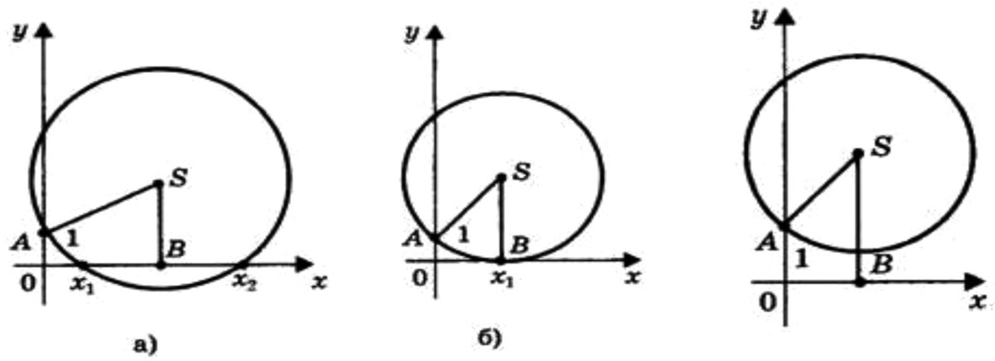


При этом возможны три случая.

1 Радиус окружности больше ординаты центра ($AS > SK$, или $R > \frac{a+c}{2a}$), окружность пересекает ось Ox в двух точках. B (x_1; 0) и D (x_2; 0), где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

2) Радиус окружности равен ординате центра ($AS = SB$, или $R = \frac{a+c}{2a}$), окружность касается оси Ox в точке B (x_1; 0), где x_1 – корень квадратного уравнения.

3) Радиус окружности меньше ординаты центра ($AS < SB$, или $R < \frac{a+c}{2a}$), окружность не имеет общих точек с осью абсцисс, в этом случае уравнение не имеет решения.



а) $AS > SB$, или $R > \frac{a+c}{2a}$ Два решения x_1 и x_2.

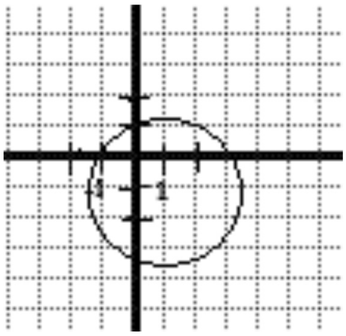
б) $AS = SB$, или $R = \frac{a+c}{2a}$ Одно решение x_1.

в) $AS < SB$, или $R < \frac{a+c}{2a}$ Не имеет решения

Пример: $x^2 - 2x - 3 = 0$.
Решение. Определим координаты точки центра окружности по формулам:

$$x = \frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1,\ \ y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1-3}{2 \cdot 1} = -1.$$

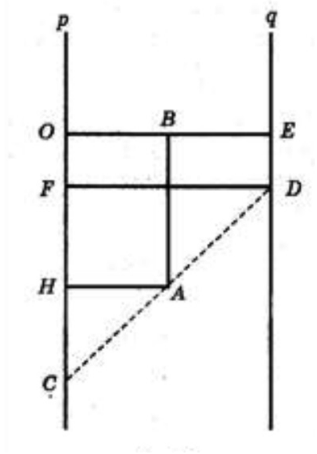
Проведем окружность радиуса $S A$, где A (0;1).
Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.



Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Это старый и незаслуженно забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на странице 83 Брадис В.М. «Четырехзначные математические таблицы». – М., Просвещение, 1990.

Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.



Криволинейная шкала номограммы построена по формулам:

$$OB = \frac{a}{1+z}, AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$, из подобия треугольников CAH и CDF получим пропорцию

$$\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB},$$

откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение $z^2 + pz + q = 0$, причем буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы.

Пример 1: для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ номограмма дает корни $z_1 = 8$ и $z_2 = 1$.

Пример 2: $2z^2 - 9z + 2 = 0 \Rightarrow z^2 - 4{,}5 + 1 = 0$ номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0{,}5$.

Геометрический способ решения квадратных уравнений

Решим уравнение $y^2 - 4y - 12 = 0$

Представим в виде $y^2 - 4y = 12$.

«изображено» выражение $y^2 - 4y$, т.е. из площади квадрата со стороной y дважды вычитается площадь квадрата со стороной 2. Значит $y^2 - 4y + 4$ есть площадь квадрата со стороной $y - 2$.

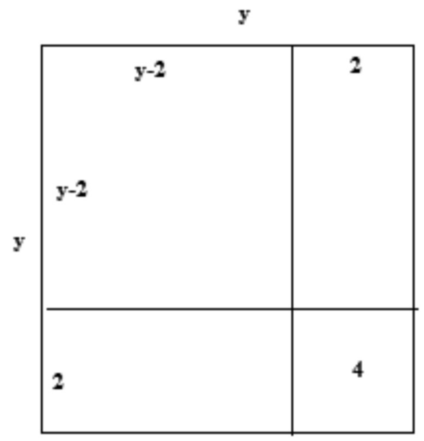
Выполнив замену $y^2 - 4y = 12$, получим

$(y - 2)^2 = 12 + 4$

$y - 2 = 4$ или $y - 2 = -4$

$y_1 = 6$ $y_2 = -2$

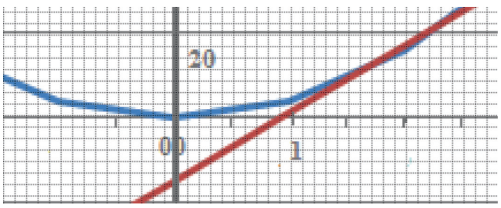
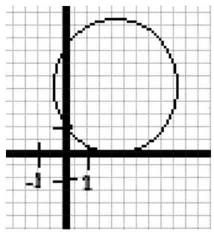
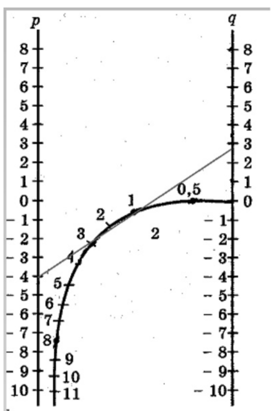
Ответ: $y_1 = 6$, $y_2 = -2$.



Решение квадратных уравнений. Практическая часть

$$4x^2 - 16x + 15 = 0$$

1 способ. Разложение левой части уравнения на множители. $4x^2 - 16x + 15 = 0$ $4x^2 - 10x - 6x + 15 = 0$ $2x(2x - 5) - 3(2x - 5) = 0$ $(2x - 5)(2x - 3) = 0$ $(2x - 5) = 0$ или $(2x - 3) = 0$ $x = 2{,}5$ $x = 1{,}5$	2. Метод выделения полного квадрата $4x^2 - 16x + 15 = 0$ $x^2 - 4x + 3{,}75 = 0$ $x^2 - 2 \cdot 2x + 3{,}75 = 0$ $x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 3{,}75 = 0$

	$(x-2)^2-0,25=0$ $(x-2)^2=0,25$ $x-2=\sqrt{0,25}$ или $x-2=-\sqrt{0,25}$ $x=2,5$ $x=1,5$
3. Решение квадратных уравнений по формуле а) $4x^2-16x+15=0$ $D=(-16)^2-4\cdot 4\cdot 15=16, D>0,$ значит корней 2 $x_1=\frac{16-4}{4\cdot 2}=1,5$ $x_2=\frac{16+4}{4\cdot 2}=2,5$ б) так как b четное число и k = -8 $D=(-8)^2-4\cdot 15=4, D>0,$ значит корней 2 $x_1=\frac{8-2}{4}=1,5$ $x_2=\frac{8+2}{4}=2,5$	4. Решение уравнений с использованием теоремы Виета $4x^2-16x+15=0$ $x^2-4x+3,75=0$ q = 3,75 > 0, имеет два одинаковых по знаку корня p = –4 < 0, оба корня положительные $\begin{cases} x_1\cdot x_2=3,75 \\ x_1+x_2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1,5 \\ x_2=2,5 \end{cases}$
5. Решение уравнений способом «переброски» $4x^2-16x+15=0$ $x^2-16x+60=0$ по Виету $y_1=10; y_2=6$ $x_1=\frac{10}{4}=2,5$ $x_2=\frac{6}{4}=1,5$	6. Свойство коэффициентов квадратного уравнения a + b + c = 0 ⇨ 4 + (-16) + 15 ≠ 0 a + c = d ⇨ 4 + 15 ≠ 16 данный способ не подходит
7. Графическое решение квадратных уравнений $4x^2-16x+15=0$ $4x^2=16x-15$ $y=4x^2$ – парабола $y=16x+15$ – прямая 	8. Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки Построим точку $S\left(\frac{16}{2\cdot 4};\frac{4+15}{2\cdot 4}\right)$ значит S(2; 2,375) Точка А(0;1) Ответ: 1.5; 2.5 
9. Решение квадратных уравнений с помощью номограммы 	10. Геометрический способ решения квадратных уравнений $4x^2-16x+15=0$ $x^2-4x+3,75=0$ $x^2-2\cdot 2x+3,75=0$ $x^2-2\cdot 2x+4-4+3,75=0$ $(x-2)^2-0,25=0$ $(x-2)^2=0,25$ $x-2=\sqrt{0,25}$ или $x-2=-\sqrt{0,25}$ Не возможно решить данным способом $x=2,5$ $x=1,5$

Выводы

Истоки алгебраических методов решения практических задач связаны с наукой древнего мира. Первоначально для решения задач применялись арифметические методы. В дальнейшем начали формироваться другие методы. Вавилонские вычислители умели решать задачи, сводящиеся к уравнениям второй степени. Был создан метод решения текстовых задач, послуживший в дальнейшем основой для выделения алгебраического компонента и его независимого изучения. Это изучение осуществлялось уже в другую эпоху сначала арабскими математиками (VI–X вв. н. э.), выделившими характерные действия, посредством которых уравнения приводились к стандартному виду приведение подобных членов, перенос членов из одной части уравнения в другую с переменой знака. А затем европейскими математиками Возрождения, в итоге длительного поиска создавшими язык современной алгебры, использование букв, введение символов арифметических операций, скобок и т.д. На рубеже XVI–XVII вв. алгебра как специфическая часть математики, обладающая своим предметом, методом, областями приложения, была уже сформирована. Дальнейшее ее развитие, вплоть до нашего времени, состояло в совершенствовании методов, расширении области приложений, уточнении понятий и связей их с понятиями других разделов математики.

Решая квадратные уравнения, я поняла, что любое квадратное уравнение не возможно решить с помощью всех способов. Для того, чтобы решить уравнение любым способом, ученику придется запомнить всю теорию, связанную со способом решения квадратных уравнений. Но запоминание всех способов не даст хорошего результата, так как, исследуя все способы решения, я выяснила, что самый эффективный способ нахождения корней уравнений это способ *решение квадратных уравнений по формуле*. Легко запоминаются формулы для вычисления корней и дискриминанта, да к тому же имеются всего лишь 3 свойства дискриминанта, которые легко запомнить. Только этот способ дал мне возможность решить любое квадратное уравнение. Но не смотря на это у каждого способа есть свои положительные и интересные стороны. Каждый способ имеет свои «плюсы» и «минусы».

Название способа решения квадратных уравнений	Плюсы	Минусы
Разложение левой части уравнения на множители	Дает возможность сразу увидеть корни уравнения.	Нужно правильно вычислить слагаемых для группировки.
Метод выделения полного квадрата	За минимальное количество действий можно найти корни уравнений	Нужно правильно найти все слагаемые для выделения полного квадрата.
Решение квадратных уравнений по формуле	Можно применить ко всем квадратным уравнениям.	Нужно выучить формулы.
Решение уравнений с использованием теоремы Виета	Достаточно легкий способ, дает возможность сразу увидеть корни уравнения.	Легко находятся только целые корни.
Решение уравнений способом переброски	За минимальное количество действий можно найти корни уравнения, применяется совместно со способом теоремы Виета.	Легко найти только целые корни.
Свойства коэффициентов квадратного уравнения	Не требует особых усилий	Подходит только к некоторым уравнениям
Графическое решение квадратного уравнения	Наглядный способ	Могут быть не точности при составлении графиков
Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки	Наглядный способ	Могут быть не точности
Решение квадратных уравнений с помощью номограммы	Наглядный способ, прост в применении.	Не всегда под рукой имеется номограмма.
Геометрический способ решения квадратных уравнений	Наглядный способ.	Похож на способ выделения полного квадрата

Все мы должны уметь решать квадратные уравнения с 8 класса и до окончания вуза, а некоторые люди на протяжении всей своей жизни вычисляют дискриминант и корни квадратных уравнений. Значит, эти знания могут пригодиться нам на протяжении всей жизни. Все методы интересны и, по своему, просты. Мне кажется, что каждый ученик, который хочет побольше узнать о математике, должен заинтересоваться данной темой.

Список литературы

1. Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы для средней школы. М.: Просвещение, 1990. – 213 с.

2. Глейзер Г.И. История математики в школе. М.: Просвещение, 1982. – 278 с.

3. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика: справочные материалы: книга для учащихся. М.: Просвещение, 1988. – 296 с.

4. Звавич Л.И., Дьяконова Н.В. Дидактические материалы по алгебре для 8 класса. М.: Экзамен, 2014. – 311 с.

5. Плужников И.Р. 10 способов решения квадратных уравнений // Математика в школе. – 2000. – № 40. – С. 12-19.

6. Учебные материалы [Электронный ресурс]: база данных содержит материалы по математике, алгебре, геометрии. – Режим доступа: http://revolution.allbest.ru (дата обращения 21.03.2019)

7. Учебные материалы [Электронный ресурс]: база данных содержит дидактические материалы по теме «Решение квадратных уравнений». – Режим доступа: http://mat.1september.ru/2001/42/no42_01.htm (дата обращения 27.03.2019).