

## ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА: ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛОВ В ЖИЗНИ

Качарова А.С.

г. Кострома, ОГБПОУ «Костромской торгово-экономический колледж», 1 курс

Руководитель: Холинова О.А., г. Кострома, ОГБПОУ «Костромской торгово-экономический колледж», преподаватель математики

Нельзя недооценивать возможности математики. Но, к сожалению, многие люди считают, что математика – «сухая» наука, и в ней нет ничего интересного: одни цифры да формулы. С этим можно не согласиться. Бертран Рассел, английский математик и философ, говорил: «Математика, если на нее правильно посмотреть, отражает не только истину, но и несравненную красоту».

Самые гениальные открытия в науке способны кардинально изменить человеческую жизнь. Одно из таких «незаметных» открытий – фракталы.

Мир фракталов – это удивительный, огромный и многообразный мир. Он очаровывает, покоряет, однако иногда в нём трудно разобраться. Фрактальные рисунки – это пик вдохновения мастера на пути к совершенному единству математики, информатики и искусства. Недавно геометрические модели природных объектов изображались с помощью комбинаций простых фигур, таких как прямые, треугольники, окружности, сферы, многогранники. Но с помощью набора этих известных фигур нелегко описать более сложные природные объекты, например, пористые материалы, формы облаков, кроны деревьев и т.д. Новые компьютерные средства выводят математику на чрезвычайно высокий уровень. Когда изучаешь фракталы, понимаешь, что весьма затруднительно провести грань между математикой и информатикой, потому что они тесно переплелись, стремясь открыть неповторимые, уникальные модели. Фракталы приближают нас к пониманию некоторых природных процессов и явлений. Поэтому тема фракталов является наиболее интересной и увлекательной для изучения.

Цель: исследовать новую ветвь математики – фракталы и основы применения в реальной жизни.

Задачи:

- проанализировать и проработать литературу по теме исследования.
- знакомство с понятием, историей возникновения и исследованиями Б. Мандельброта;
- дать представление о фракталах, встречающихся в нашей жизни.

- нахождение подтверждения теории фрактальности окружающего мира;
- определить области применения фракталов.

**Объект** исследования – фракталы в математике и в реальном мире. фракталы и их практическое применение.

**Предмет** исследования – фрактальная геометрия.

Методы исследования в работе: анализ, синтез, поиск, моделирование.

### История появления понятия «фрактал»

Первые идеи фрактальной геометрии возникли в 19 веке.

Георг Кантор (Cantor, 1845–1918) – немецкий математик, логик, теолог, создатель теории бесконечных множеств, с помощью простой рекурсивной (повторяющейся) процедуры превратил линию в набор несвязанных точек. Он брал линию и удалял центральную треть и после этого повторял то же самое с оставшимися отрезками. Получалась, так называемая, Пыль Кантора.



Джузеппе Пеано (Giuseppe Peano; 1858–1932) – итальянский математик изобразил особую линию. Он брал прямую и заменял ее на 9 отрезков длиной в 3 раза меньшей, чем длина исходной линии. Далее он делал то же самое с каждым отрезком. И так до бесконечности. Уникальность такой линии в том, что она заполняет всю плоскость. Позднее аналогичное построение было осуществлено в трехмерном пространстве.

Само слово «фрактал» появилось благодаря гениальному ученому Бенуа Мандельброту.

Он сам придумал этот термин в семидесятых годах прошлого века, позаимствовав слово *fractus* из латыни, где оно буквально означает «ломанный» или «дробленный». Что же это такое? Сегодня под словом «фрактал» чаще всего принято подразумевать графическое изображение структуры, которая в более крупном масштабе подобна сама себе.

Определение фрактала, данное Мандельбротом, звучит так: «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому».

Математическая база для появления теории фракталов была заложена за много лет до рождения Бенуа Мандельброта, однако развиться она смогла лишь с появлением вычислительных устройств. В начале своей научной деятельности Бенуа работал в исследовательском центре компании ИВМ. В то время сотрудники центра трудились над передачей данных на расстояние. В ходе исследований ученые столкнулись с проблемой больших потерь, возникающих из-за шумовых помех. Перед Бенуа стояла сложная и очень важная задача – понять, как предсказать возникновение шумовых помех в электронных схемах, когда статистический метод оказывается неэффективным.

Просматривая результаты измерений шума, Мандельброт обратил внимание на одну странную закономерность – графики шумов в разном масштабе выглядели одинаково. Идентичная картина наблюдалась независимо от того, был ли это график шумов за один день, неделю или час. Стоило изменить масштаб графика, и картина каждый раз повторялась.

При жизни Бенуа Мандельброт неоднократно говорил, что он не занимается формулами, а просто играет с картинками. Этот человек мыслил очень образно, а любую алгебраическую задачу переводил в область геометрии, где, по его словам, правильный ответ всегда очевиден.

Неудивительно, что именно человек с таким богатым пространственным воображением стал отцом фрактальной геометрии. Ведь осознание сути фракталов приходит именно тогда, когда начинаешь изучать рисунки и вдумываться в смысл странных узоров – завихрений.

Фрактальный рисунок не имеет идентичных элементов, но обладает подобностью в любом масштабе. Построить такое изображение с высокой степенью детализации вручную ранее было просто невозможно, на это требовалось огромное количество вычислений.

Один из первых рисунков фрактала был графической интерпретацией множества Мандельброта, которое родилось благодаря исследованиям Гастона Мориса Жюлиа (*Gaston Maurice Julia*).

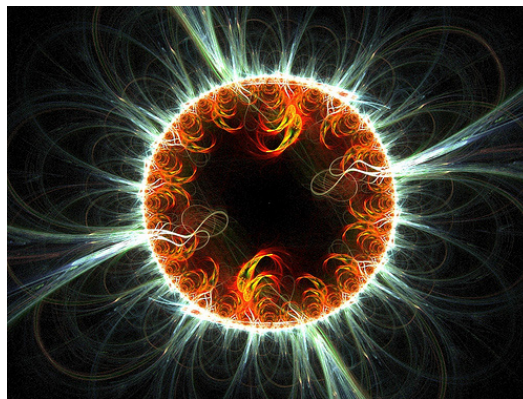
Многие объекты в природе обладают фрактальными свойствами, например, побережья, облака, кроны деревьев, снежинки, кровеносная система и система альвеол человека или животных.

### Применение фракталов

Фракталы находят все большее и большее применение в науке. Основная причина этого заключается в том, что они описывают реальный мир иногда даже лучше, чем традиционная физика или математика.

### Фрактальная живопись

Фрактальная живопись – одно из направлений современного арта, популярное среди цифровых художников. Фрактальные картины необычно и завораживающе действуют на зрителя, рождая яркие пылающие образы. Сказочные абстракции создаются посредством скучных математических формул, но воображение воспринимает их живыми.



### Фракталы в графике

Наиболее полезным использованием фракталов в компьютерной науке является фрактальное сжатие данных. В основе этого вида сжатия лежит тот факт, что реальный мир хорошо описывается фрактальной геометрией. При этом, картинка сжимается гораздо лучше, чем это делается обычными методами (такими как *jpeg* или *gif*). Другое преимущество фрактального сжатия в том, что при увеличении картинки, не наблюдается эффекта пикселизации (увеличения размеров точек до размеров, искажающих изображение). При фрактальном же сжатии, после увеличения, картинка часто выглядит даже лучше, чем до него. Фракталы широко применяются в компьютерной графи-

ке – при построении изображений деревьев, кустов, поверхности морей, горных ландшафтов, и других природных объектов. Благодаря фрактальной графике был изобретён эффективный способ реализации сложных неевклидовых объектов, чьи образы похожи на природные: это алгоритмы синтеза коэффициентов фрактала, позволяющие воспроизвести копию любой картинке максимально близко к оригиналу. Интересно, что кроме фрактальной «живописи» существуют так же фрактальная музыка и фрактальная анимация. В изобразительном искусстве существует направление, занимающееся получением изображения случайного фрактала – «фрактальная монотипия» или «стохастипия».

В математической основе фрактальной графики лежит фрактальная геометрия, где в основу методов построения «изображений-наследников» помещён принцип наследования от исходных «объектов-родителей». Сами понятия фрактальной геометрии и фрактальной графики появилось всего около 30 лет назад, но уже прочно вошли в обиход компьютерных дизайнеров и математиков.

Базовыми понятиями фрактальной компьютерной графики являются:

- Фрактальный треугольник – фрактальная фигура – фрактальный объект (иерархия в порядке убывания);
- Фрактальная прямая;
- Фрактальная композиция;
- «Объект-родитель» и «Объект наследник».

Также как в векторной и трёхмерной графике, создание фрактальных изображений математически вычисляемо. Главное отличие от первых двух видов графики в том, что фрактальное изображение строится по уравнению или системе уравнений, – ничего кроме формулы в памяти компьютера для выполнения всех вычислений хранить не нужно, – и такая компактность математического аппарата позволила использование этой идеи в компьютерной графике. Просто изменяя коэффициенты уравнения, можно с лёгкостью получить совершенно иное фрактальное изображение – при помощи нескольких математических коэффициентов задаются поверхности и линии очень сложной формы, что позволяет реализовать такие приёмы композиции, как горизонтали и вертикали, симметрию и асимметрию, диагональные направления и многое другое.

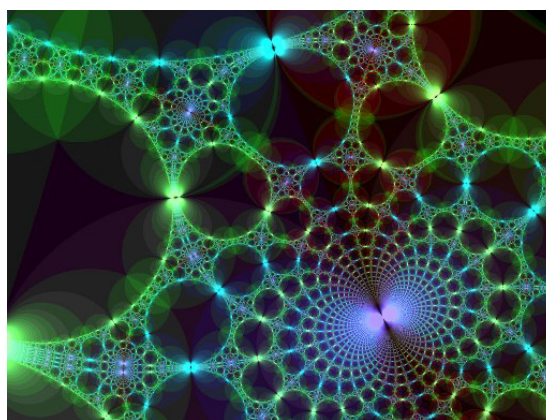
#### Фракталы в децентрализованных сетях

Принцип фрактального сжатия информации для компактного сохранения сведений об узлах сети «Netsukuku» использует система назначения IP-адресов. Каждый

её узел хранит 4 килобайта информации о состоянии соседних узлов. Любой новый узел подключается к общей сети Интернет, не требуя центрального регулирования раздачи IP-адресов. Таким образом, можно сделать вывод, что принцип фрактального сжатия информации обеспечивает децентрализованную работу всей сети, а потому работа в ней протекает максимально устойчиво.

#### Фракталы в радиотехнике

Фрактальные антенны. Для передачи данных на расстояния используются антенны, имеющие фрактальные формы, что сильно уменьшает их размеры и вес.



Использование фрактальной геометрии при проектировании антенных устройств впервые было применено американским инженером Натаном Коэном, который жил в центре Бостона, где была запрещена установка внешних антенн на здания. Чтобы обойти запрет бостонских властей устанавливать на домах наружные антенны, он замаскировал антенну своей радиостанции под декоративную фигуру, выполненную на основе фрактальной ломаной, описанной шведским математиком Хельге фон Кохом (Helve von Koch) в 1904 году. Натан вырезал из алюминиевой фольги фигуру в форме кривой Коха и наклеил её на лист бумаги, затем присоединил к приемнику. Коэн основал собственную компанию и наладил их серийный выпуск.

Опубликованные Коэном результаты исследований характеристик новой антенной конструкции привлекли внимание специалистов. Благодаря усилиям многих исследователей сегодня теория фрактальных антенн превратилась в самостоятельный, довольно развитый аппарат синтеза и анализа ЭМА.

Фрактальные антенны – относительно новый класс электрически малых антенн (ЭМА), принципиально отличающийся своей геометрией от известных решений.



По сути, традиционная эволюция антенн базировалась на евклидовой геометрии, оперирующей объектами целочисленной размерности (линия, круг, эллипс, парабола и т. п.).

Главное отличие фрактальных геометрических форм – их дробная размерность, что внешне проявляется в рекурсивном повторении в возрастающем либо уменьшаемом масштабах исходных детерминированных или случайных шаблонов. Фрактальные технологии получили распространение при формировании средств фильтрации сигналов, синтезе трехмерных компьютерных моделей природных ландшафтов, сжатии изображений.

Вполне естественно, что фрактальная «мода» не обошла стороной и теорию антенн. Тем более, что прообразом современных фрактальных технологий в антенной технике явились предложенные в середине 60-х годов прошлого века логопериодические и спиральные конструкции. Правда, в строгом математическом смысле такие конструкции на момент разработки не имели отношения к фрактальной геометрии, являясь, по сути, лишь фракталами первого рода. Сейчас исследователи, в основном методом проб и ошибок, пытаются использовать известные в геометрии фракталы в антенных решениях.

Фрактальные антенны позволяют получить практически тот же коэффициент усиления, что и обычные, но при меньших габаритах, что важно для мобильных приложений. Рассмотрим результаты, полученные в области создания фрактальных антенн самых различных типов.

Первые публикации по электродинамике фрактальных структур относятся к 80-м годам прошлого века. В публикациях по истории фрактальных антенн обычно упоминается работа ученых Университета штата Пенсильвания Я.Кима и Д.Джаггарда (Y.Kim and D.L.Jaggard). Первенство в теоретических исследованиях возможности применения фрактальных форм для формирования многополосных по частоте антенн приписывают ученому Технологического университета Каталонии К.Пуенте (C.Puente). Первой конструкцией фрактальной антенны с наиболее полно изученными электромагнитными и направленными свойствами стала антенна на основе префрактальной кривой Коха.

#### **Фракталы в цифровой технике**

Фрактальная геометрия внесла неоценимый вклад в разработку новых технологий в области цифровой музыки, а так же сделала возможной сжатие цифровых изображений.

Существующие фрактальные алгоритмы сжатия изображения основаны на принципе хранения сжимающего изображения вместо самой цифровой картинке. Для сжимающего изображения основная картинка остаётся неподвижной точкой. Фирма «Microsoft» использовала один из вариантов данного алгоритма при издании своей энциклопедии, но по тем или иным причинам широкого распространения эта идея не получила.

#### **Фракталы в естественных науках**

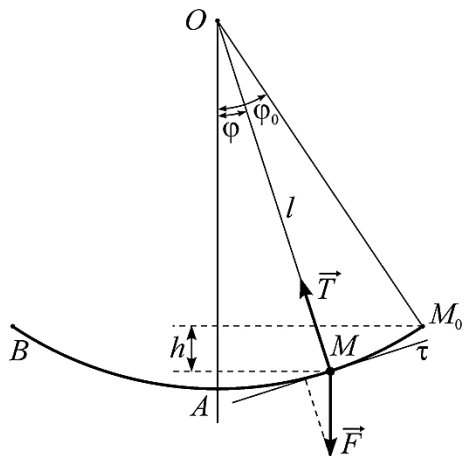
В физике фракталы естественным образом возникают при моделировании нелинейных процессов, таких как турбулентное течение жидкости, сложные процессы диффузии-адсорбации, пламя, облака и т.д. фракталы применяются для моделирования пористых материалов, например, в нефтехимии. Изучение турбулентности в потоках очень хорошо подстраивается под фракталы. Турбулентные потоки хаотичны и поэтому их сложно точно смоделировать. И здесь помогает переход к из фрактальному представлению, что сильно облегчает работу инженерам и физикам, позволяя им лучше понять динамику сложных потоков. В биологии они применяются для моделирования популяций и для описания систем внутренних органов. На данное время фракталы находят, и вероятно будут находить применение в медицине. Сам по себе человеческий организм состоит из множества фракталоподобных структур: кровеносная система, мышцы, бронхи и т.д..

Очень часто фракталы применяются в геологии и геофизике. Не секрет что побережья островов и континентов имеют некоторую фрактальную размерность, зная которую можно очень точно вычислить длины берегов.

#### **Физическая интерпретация фракталов**

Чтобы понять алгебраический фрактал, рассмотрим простой опыт. Шарик, подвешенный на нитке, отклоняют от вертикали и отпускают. Возникают колебания. Если шарик отклонили немного, то его движение описывается линейными уравнениями. Если отклонение сделать достаточно большим – уравнения будут уже нелинейными. Что при этом изменится? В первом случае частота колебаний (и, соответственно, период) не зависит от степени начального отклонения. Во втором – такая зависимость имеет место. Полный аналог механического маятника как колебательной системы – колебательный контур, или «электрический маятник». В простейшем случае он состоит из катушки индуктивности, конденсатора (емкости) и резистора (сопротивления).

Если все три указанных элемента линейны, то колебания в контуре эквивалентны колебаниям линейного маятника. Но если, к примеру, емкость нелинейна, период колебаний будет зависеть от их амплитуды.



Динамика колебательного контура определяется двумя переменными, например током в контуре и напряжением на емкости. Если откладывать эти величины вдоль осей  $X$  и  $Y$ , то каждому состоянию системы будет соответствовать определенная точка на полученной координатной плоскости. Такую плоскость называют фазовой. (Соответственно, если динамическая система определяется  $n$  переменными, то вместо двумерной фазовой плоскости ей можно поставить в соответствие  $n$ -мерное фазовое пространство).

Теперь начнем воздействовать на наши маятники внешним периодическим сигналом. Реакция линейной и нелинейной систем будет различной. В первом случае постепенно установятся регулярные периодические колебания с той же частотой, что и частота вынуждающего сигнала. На фазовой плоскости такому движению соответствует замкнутая кривая, называемая аттрактором (от английского глагола *to attract* – притягивать), – множество траекторий, характеризующих установившийся процесс. В случае нелинейного маятника могут возникнуть сложные, непериодические колебания, когда траектория на фазовой плоскости не замкнется за сколь угодно долгое время. При этом поведение детерминированной системы будет внешне напоминать совершенно случайный процесс.

Таким образом, фазовое пространство системы разбивается на области притяжения аттракторов. Если фазовым является двумерное пространство, то окрашивая области притяжения различными цветами, можно получить цветовой фазовый портрет

этой системы (итерационного процесса). Меняя алгоритм выбора цвета, можно получить сложные фрактальные картины с причудливыми многоцветными узорами.

Фракталы используются для описания кривизны поверхностей. Неровная поверхность характеризуется комбинацией из двух разных фракталов.

### Фракталы в природе

Природа зачастую создает удивительные и прекрасные фракталы с идеальной геометрией и такой гармонией, что просто замираешь от восхищения.

Фракталы в природе – это частое явление. Природа создает удивительные и прекрасные фракталы, с идеальной геометрией и такой гармонией, что просто замираешь от восхищения. Это и молния, пронизывающая небо до горизонта; изрезанная береговая линия материка и горные массивы; подводные кораллы, в природе их насчитывается свыше 3500 разновидностей, и морские раковины; осьминог с фрактальным строением тела и присосок на всех восьми щупальцах, и брюхоногий голожаберный моллюск; цветная коралловая капуста, обладающая нестандартным выпуклым рельефом; деревья листья цветы; кровеносная система человека и многое др. На картине японского художника Хокусаи «Большая волна» можно заметить, что художник, рисуя гребень волны, использовал фрактал, подмеченный в природе, как бы состоящий из многочисленных хищных водяных лап.

Фракталы широко применяются в компьютерной графике для построения изображений природных объектов, таких, как деревья, кусты, горные ландшафты, поверхности морей и т. д. Роль фракталов в машинной графике сегодня достаточно велика. Они приходят на помощь, например, когда требуется, получить линии и поверхности очень сложной формы. Фракталы используются для описания кривизны поверхностей. Неровная поверхность характеризуется комбинацией из двух разных фракталов. С точки зрения машинной графики, фрактальная геометрия незаменима при генерации искусственных облаков, объемных рельефных гор, поверхности моря. Фактически найден способ легкого представления сложных неевклидовых объектов, образы которых весьма похожи на природные. Фрактальная компьютерная графика широко используется при создании мультфильмов и фантастических художественных фильмов. Используются антенны, имеющие фрактальные формы, что сильно уменьшает их размеры и вес. Если же рассматривать фракталы с точки зрения биологии, то это моделирование лю-

бых хаотических процессов, в частности при описании моделей популяций.

### Использование фракталов при торговле на рынке Форекс

Фракталы используются в торговле очень многими форекс трейдерами. Активное использование их в торговле начал применять Билл Вильямс, но, надо заметить, что пользовались ими задолго до него, хотя и под другим названием. Доктор Вильямс, в результате проделанной научной работы, пришел к выводу, что рынок движется так же, как и хаотические системы. Другими словами, течение крови в сердце, береговая линия и цена на хлопок движутся сходным образом с одинаковой структурой. Исследования Билла Вильямса свидетельствуют, что рынок – это не линейная система, а именно хаотическая. Соответственно, использование для ее анализа стандартных индикаторов, основанных на линейных функциях, не принесет адекватного результата. Отсюда же вытекает и то, что стабильность рынка носит временный характер, а постоянный – именно хаос. Обнаружены были фракталы Форекс в процессе компьютерного моделирования, тогда же были обнаружены обратные связи, которыми описывается структура рынка. Фрактал по своей сути является повторяющейся формацией, которая присуща любым стоп-лоссов. На форекс это любые рынки, любые таймфреймы. И происхождение их, что у фракталов товарного и фондового рынка, что у фракталов береговой линии, имеет одинаковую природу.

Фракталы – это индикатор, разработанный Биллом Уильямсом. Он является простым и в тоже время многогранным. Его можно использовать и как самостоятельный индикатор, и в сочетании с другими инструментами технического анализа.

Торговля с использованием фракталов согласно “Теории Хаоса” Билла Уильямса

Фрактальный индикатор является одним из пяти индикаторов торговой системы Билла Уильямса. Согласно системе, сигналы, поступающие от фракталов, необходимо фильтровать с помощью индикатора под названием Аллигатор.

Вот как следует торговать с помощью фракталов:

- Если фрактал, дающий сигнал на покупку, находится выше зубов Аллигатора (красная линия), трейдерам следует выставить отложенный ордер на покупку на несколько пунктов выше фрактала.

- Если фрактал, дающий сигнал на продажу, находится ниже зубов Аллигатора, трейдерам следует выставить отложенный ордер на продажу на несколько пунктов ниже фрактала.

В других случаях не стоит доверять торговым сигналам, которые предоставляет фрактальный индикатор.

Когда вы торгуете по методу Билла Уильямса, следует соблюдать самое главное правило: никогда не доверяйте торговым сигналам других индикаторов (Gator indicator, Awesome Oscillator, MFI и т.д.), если первый бычий/медвежий фрактал сформирован не за пределами зубов Аллигатора (то есть по другую сторону от красной линии)

Сигнал остается актуальным до тех пор, пока не сработает отложенный ордер или не появится новый сигнал (в этом случае необходимо изменить уровень отложенного ордера). Каждый новый фрактал по тренду может быть использован для наращивания торговой позиции.

### Фрактальные антенны

Развитие мобильных телекоммуникационных технологий, радаров и СВЧ датчиков перемещений диктует необходимость разработки новых многоэлементных антенных систем, состоящих из излучателей, имеющих малые размеры и оптимальную конфигурацию. Антенна является неотъемлемой составной частью любого радиотехнического устройства, которое предназначено для передачи или приёма информации с помощью радиоволн через окружающее пространство. Как было сказано выше, фрактальные антенны имеют отличающуюся от всех других видов антенн геометрию. Главная особенность фрактальных геометрических форм – их дробная размерность. Среди большого разнообразия фрактальных структур одной из наиболее удобных для создания антенн являются фракталы Минковского. «Инициатором» фрактала является отрезок, а «генератором» является ломаная из восьми звеньев (два равных звена продолжают друг друга).





В антенных решениях используются не подлинные фракталы, а лишь несколько первых их итерационных форм, получивших в геометрии название кривых, заполняющих пространство (Space-Filling Curves, SFC) или плоскость (Plane-Filling Curves, PFC). Реже используется термин «префракталы». Все эти понятия применительно к антенным конструкциям могут употребляться как синонимы. Такова исторически сложившаяся терминология теории фрактальных антенн, хотя она и не соответствует принятым математическим определениям.

SFC могут применяться в качестве шаблонов для изготовления монополей и плеч диполей, формирования топологии печатных антенн, частотно-селективных поверхностей (Frequency Selection Surfaces, FSS) или обечаек зеркальных рефлекторов, построения контуров рамочных антенн и профилей апертуры рупоров, а также фрезеровки пазов в щелевых антеннах. В англоязычной литературе соответствующие антенны нередко называют «space-filling antenna» (SFA) (антенны, заполняющие пространство).

В случае проволочных антенн самопересечение SFC допускается только в начальном (или конечном) пункте. Иначе говоря, фрактальная линия может иметь вид замкнутого контура, но ни одна из ее частей не может быть замкнутым фрагментом. Отсутствие точек самоконтакта в SFC-объектах позволяет говорить о них как о «самоизбегающих» кривых. Отсюда, кстати, происходит еще одно название этих ломаных линий – FASS-кривые (space-Filling self-Avoidance Simplicity Similarity – самоуклоняющиеся кривые подобных сегментов, заполняющих пространство).

Существует и другое ограничение всех типов фрактальных антенн: сегменты используемых в них SFC-линий должны быть короче одной десятой рабочей длины волны антенны в свободном пространстве. При этом желательно, чтобы общее число связанных SFC-сегментов в антенных топологиях превышало 10.

Экспериментальные данные, полученные специалистами компании Cushcraft для кривой Коха, четырех итераций меандра и спиральной антенны, позволяют сопоставить электрические свойства антенны Коха с другими излучателями с периодической структурой. Все сопоставленные излучатели обладали многочастотными свойствами, что проявилось в наличии периодических резонансов на графиках импедансов. Однако для многодиапазонных приложений более всего пригоден фрактал Коха, у которого с ростом частоты пиковые значения реактивных и активных сопротивлений умень-

шаются, тогда как у меандра и спирали они возрастают.

В целом следует отметить, что теоретически представить механизм взаимодействия фрактальной приемной антенны и падающих на нее электромагнитных волн сложно из-за отсутствия аналитического описания волновых процессов в проводнике со сложной топологией. В такой ситуации основные параметры фрактальных антенн целесообразно определять путем математического моделирования. Численному исследованию электромагнитных процессов, протекающих во фрактальных антеннах и при их взаимодействии с предметами окружающей среды, посвящено достаточно много работ. Их подробный обзор и анализ выходит за рамки данной статьи. Общий недостаток всех известных публикаций по результатам исследований фрактальных антенн – отсутствие указаний на статистическую обработку результатов экспериментов. В частности, в них не приводятся сведения о доверительных интервалах для измеренных параметров, что не позволяет судить о точности полученных в итоге эмпирических соотношений. В целом же, статистическая теория фрактальных антенн при расчете их численными методами пока еще ждет своих разработчиков.

Таким образом, возможность выбора множества разнообразных параметров антенной системы на основе ломаной Коха позволяет при проектировании удовлетворять различные требования, предъявляемые к значению внутреннего сопротивления и распределению резонансных частот. Однако, поскольку взаимозависимость рекурсивной размерности и характеристик антенны может быть получена только для определенной геометрии, справедливость рассмотренных свойств для других рекурсивных конфигураций нуждается в дополнительном исследовании.

### Заключение

Наука о фракталах очень молода, потому что они стали появляться с развитием компьютерных технологий. Поэтому многое еще не изучено и многое еще предстоит открыть. Основная причина применения фракталов в различных науках заключается в том, что они описывают реальный мир иногда даже лучше, чем традиционная физика или математика. Мы выяснили, что фракталы можно применять не только в точных науках, но и практически во всем, что нас окружает: одежда, элемент декора интерьера, дизайн открыток, штор и многого другого.

Помимо той полезной роли, которую играет фрактальная геометрия при описании сложности природных объектов, она предлагает ещё хорошую возможность популяризации математических знаний. Понятия фрактальной геометрии наглядны и интуитивны. Её формы привлекательны с эстетической точки зрения и имеют разнообразные приложения. Поэтому фрактальная геометрия, возможно, поможет опровергнуть взгляд на математику как на сухую и недоступную дисциплину и станет дополнительным стимулом для учащихся в освоении этой интересной и увлекательной науки.

Во всем, что нас окружает, мы часто видим хаос, но на самом деле это не случайность, а идеальная форма, разглядеть которую нам помогают фракталы. Природа – лучший архитектор, идеальный строитель и инженер. Она устроена очень логично, и если где-то мы не видим закономерности, это означает, что ее нужно искать в другом масштабе. Люди все лучше и лучше это понимают, стараясь во многом подражать естественным формам. Инженеры проектируют акустические системы в виде раковины, создают антенны с геометрией снежинок и так далее. Уверены, что фракталы хранят в себе еще немало секретов, и многие из них человеку еще лишь предстоит открыть.

После того как были открыты фракталы, для многих стало очевидно, что старые, добрые формы евклидовой геометрии сильно проигрывают большинству природных объектов из-за отсутствия в них некоторой нерегулярности, беспорядка и непредсказуемости. Возможно, что новые идеи фрактальной геометрии помогут изучить многие загадочные явления окружающей природы.

Нам удалось показать, все, что существует в реальном мире, является фракталом. Мы убедились, что тому, кто занимается фракталами, открывается прекрасный, удивительный мир, в котором царят математика, природа и искусство. Мы надеемся, что после знакомства с нашей работой, вы, как и мы, убедитесь в том, что математика прекрасна и удивительна.

Кроме большой функциональности, возможности применения фракталов в самых различных сферах жизни, это очень яркие, сочные, изумительные по своей красоте изображения, которые доставляют огромное эстетическое удовольствие, позволяя наслаждаться ими. Создавать свои собственные фракталы может каждый, используя доступные графические программы. От самого процесса создания совершенно для нас нового и одновременно невероятно красивого, порой фантастического, получаешь

массу удовольствия. Фракталы очень разнообразны, как и их применение. Изучая фрактальные модели для практического применения, каждый сможет выбрать подходящее для себя направление.

Область применения фрактальных антенн не ограничивается только приемом/передачей тв-сигнала. Они успешно применяются для организации wi-fi сетей, сотовой связи, в том числе и закрытых военных радиоканалов. Таким образом, можно сделать вывод, что освоение приемов построения фракталов и знание области их применения способствуют повышению эффективности изучения многих объектов и процессов живой и неживой природы. В свою очередь это, с одной стороны, мотивирует к изучению практических областей применения геометрии, физики, информатики и других предметов естественно-научного цикла, с другой, позволяет проследить связь между наукой и реальной жизнью и между отдельными разделами

Можно сказать, что фактически найден способ легкого, удобного представления сложных неевклидовых объектов, образы которых похожи на природные.

Фракталы позволяют посмотреть на математику совсем с другой стороны. Казалось бы, производятся обычные расчёты с обычными цифрами, однако это даёт уникальные, неповторимые результаты, которые позволяют почувствовать себя творцом природы. Фракталы дают понять, что математика – это тоже наука о прекрасном.

Значение открытия фракталов для науки трудно переоценить. Создание практически точных моделей окружающей среды позволит точнее рассмотреть и оценить факторы, влияющие на ее состояние и развитие.

За фракталами таятся огромные практические перспективы развития. Фракталы оказались принципиально новым открытием в геометрии, способным изменить древние, бытующие до недавних пор, представления о геометрической структуре мира.

В наши дни теория фракталов находит широкое применение в различных областях человеческой деятельности. Помимо чисто научного объекта для исследований и уже упоминавшейся фрактальной живописи, фракталы используются в теории информации для сжатия графических данных (здесь в основном применяется свойство самоподобия фракталов – ведь чтобы запомнить небольшой фрагмент рисунка и преобразования, с помощью которых можно получить остальные части, требуется гораздо меньше памяти, чем для хранения всего файла). Добавляя в формулы, задающие фрактал, случайные возмущения, можно получить



стохастические фракталы, которые весьма правдоподобно передают некоторые реальные объекты – элементы рельефа, поверхность водоемов, некоторые растения, что с успехом применяется в физике, географии и компьютерной графике для достижения большего сходства моделируемых предметов с настоящими. В радиоэлектронике в последнее десятилетие начали выпускать антенны, имеющие фрактальную форму. Занимая мало места, они обеспечивают вполне качественный прием сигнала. Экономисты используют фракталы для описания кризисных колебания курсов валют (это свойство было открыто Мандельбротом более 30 лет назад). На этом мы завершим эту небольшую экскурсию в удивительный по красоте и разнообразию мир фракталов.

В ходе данной исследовательской работы поставленные **задачи** были выполнены, цель достигнута, а гипотеза нашла своё подтверждение.

#### Список литературы

1. Красота математических поверхностей. – М.: Куб, 2005.
2. Леонтьев В.П., Новейшая энциклопедия Интернет. – М.: ОЛМА-ПРЕСС, 2003.
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
4. Маршак С.Я. / Художественная литература, 1985.
5. Шляхтина С. В мире фрактальной графики. – СПб.: Компьютер Price, 2005.
6. Информатика. – 2008. – № 24.
7. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. – М.: Мир, 1993;
8. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории;
9. Мандельброт Б. Самоаффинные фрактальные множества // Фракталы в физике. – М.: Мир 1988.
10. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. – Н.Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та 1999.
11. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы / РХД, 2001.
12. Милнор Дж. Голоморфная динамика / РХД, 2000.
13. Витолин Д. Применение фракталов в машинной графике // Computerworld-Россия. – 1995.
14. Мандельброт Б. Самоаффинные фрактальные множества // Фракталы в физике. – М.: Мир, 1988.
15. Красота повтора» опубликована // Популярная механика. – 2009. – №3.
16. <http://elementy.ru>.
17. <http://ru.wikipedia.org>.
18. <http://www.deviantart.com>.
19. <http://fractals.nsu.ru>.
20. <http://fraktals.ucoz.ru>.
21. <http://www.bsu.burnet.ru/library/berson/index.html>.
22. <http://www.uni-dubna.ru/kafedr/mazny/page11.htm>;
23. <http://robots.ural.net/fractals/>.