ФОРМУЛА ЛЕЙБНИЦА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ФУНКЦИЙ

Борисова О.О.

г. Волгоград, МОУ «СШ №35», 11 «А» класс

Руководители: Емельяненко М.В., г. Волгоград, МОУ «СШ №35», учитель математики; Сазонова Е.В., г. Волгоград, МОУ «СШ №35», учитель математики

«Тоже мне, бином Ньютона!»
из романа «Мастер и Маргарита»

«Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике»
Мартин Гарднер

Цель работы: обобщить формулы сокращенного умножения, показать их применение к решению задач.

Задачи:

1) изучить и систематизировать информацию по данному вопросу;

2) разобрать примеры задач на применение бинома Ньютона и формул суммы и разности степеней.

Объекты исследования: бином Ньютона, формулы суммы и разности степеней.

Методы исследования:

1. Работа с учебной и научно-популярной литературой, ресурсами сети Интернет.

2. Расчеты, сравнение, анализ, аналогия.

Актуальность. Человеку часто приходится иметь дело с задачами, в которых нужно подсчитать число всех возможных способов расположения некоторых предметов или число всех возможных способов осуществления некоторого действия. Разные пути или варианты, которые приходится выбирать человеку, складываются в самые разнообразные комбинации. И целый раздел математики, называемый комбинаторикой, занят поиском ответов на вопросы: сколько всего есть комбинаций в том или другом случае.

С комбинаторными величинами приходится иметь дело представителям многих специальностей: ученому-химику, биологу, конструктору, диспетчеру и т. п. Усиление интереса к комбинаторике в последнее время обуславливается бурным развитием кибернетики и вычислительной техники.

Когда хотят подчеркнуть, что собеседник преувеличивает сложность задач, с которыми он столкнулся, говорят: «Тоже мне бином Ньютона!» Дескать, вот бином Ньютона, это сложно, а у тебя какие проблемы! О биноме Ньютона слышали даже те люди, чьи интересы никак не связаны с математикой.

Слово «бином» означает двучлен, т.е. сумму двух слагаемых. Из школьного курса известны так называемые формулы сокращенного умножения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Обобщением этих формул является формула, называемая формулой бинома Ньютона. Используются в школе и формулы разложения на множители разности квадратов, суммы и разности кубов. Имеют ли они обобщение для других степеней? Да, есть такие формулы, они часто используются в решении различных задач: на доказательство делимости, сокращение дробей, приближенные вычисления.

Изучение обобщающих формул развивает дедуктивно-математическое мышление и общие мыслительные способности.

1. Формула бинома Ньютона

Сочетания и их свойства

Пусть X – множество, состоящее из n элементов. Любое подмножество Y множества X, содержащее k элементов, называется сочетанием k элементов из n, при этом, $k \le n$.

Число различных сочетаний k элементов из n обозначается C_n^k. Одной из важнейших формул комбинаторики является следующая формула для числа C_n^k:

$$C_n^k = \frac{n!}{k(n-k)!}. \quad (1)$$

Её можно записать после очевидных сокращений следующим образом:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}. \quad (2)$$

В частности,

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} = 1.$$

Это вполне согласуется с тем, что в множестве X имеется только одно подмножество из 0 элементов – пустое подмножество.

Числа C_n^k обладают рядом замечательных свойств.

Справедлива формула

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad (3)$$

Смысл формулы (3) состоит в том, что имеется взаимно-однозначное соответствие между множеством всех k-членных подмножеств из X и множеством всех $(n-k)$-членных подмножеств из X: чтобы установить это соответствие, достаточно каждому k-членному подмножеству Y сопоставить его дополнение в множестве X.

Справедлива формула

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n \qquad (4)$$

Сумма, стоящая в левой части, выражает собой число всех подмножеств множества X (C_n^0 есть число 0-членных подмножеств, C_n^1 – число одночленных подмножеств и т.д.).

При любом k, $1 \le k \le n$, справедливо равенство

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \qquad (5)$$

Это равенство нетрудно получить с помощью формулы (1). В самом деле,

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)}{k!(n-1-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}(k+n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

1.2. Вывод формулы бинома Ньютона

Рассмотрим степени двучлена $a + b$.

$$n = 0,\ (a+b)^0 = 1$$

$$n = 1,\ (a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$n = 2,\ (a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$n = 3,\ (a+b)^3 = 1\,a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1\,b^3$$

$$n = 4,\ (a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a\,b^3 + 1b^4$$

$$n = 5,\ (a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

Заметим следующие закономерности:

– число членов получаемого многочлена на единицу больше показателя степени бинома;

– показатель степени первого слагаемого убывает от n до 0, показатель степени второго слагаемого возрастает от 0 до n;

– степени всех одночленов равны степени двучлена в условии;

– каждый одночлен является произведением первого и второго выражения в различных степенях и некоторого числа – биноминального коэффициента;

– биноминальные коэффициенты, равноотстоящие от начала и конца разложения, равны.

Обобщением этих формул является следующая формула, называемая формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n a^0 b^n. \qquad (6)$$

В этой формуле n может быть любым натуральным числом. [2]

Выведем формулу (6). Прежде всего, запишем:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b) \ldots (a+b), \qquad (7)$$

где число перемножаемых скобок равно n. Из обычного правила умножения суммы на сумму вытекает, что выражение (7) равно сумме всевозможных произведений, которые можно составить следующим образом: любое слагаемое первой из сумм а + b умножается на любое слагаемое второй суммы $a + b$, на любое слагаемое третьей суммы и т.д.

Из сказанного ясно, что слагаемым в выражении для $(a+b)^n$ соответствуют (взаимно-однозначно) строки длиной n, составленные из букв а и b. Среди слагаемых будут встречаться подобные члены; очевидно, что таким членам соответствуют строки, содержащие одинаковое количество букв a. Но число строк, содержащих ровно k раз букву a, равно C_n^k. Значит, сумма всех членов, содержащих букву а множителем ровно k раз, равна $C_n^k a^{n-k} b^k$. Поскольку k может принимать значения 0, 1, 2, …, n-1, n, то из нашего рассуждения следует формула (6). Заметим, что (6) можно записать короче:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \qquad (8)$$

Хотя формулу (6) называют именем Ньютона, в действительности она была открыта ещё до Ньютона (например, её знал Паскаль). Заслуга Ньютона состоит в том, что он нашёл обобщение этой формулы на случай не целых показателей. Именно И. Ньютон в 1664–1665 гг. вывел формулу, выражающую степень двучлена для произвольных дробных и отрицательных показателей.

Числа C^0_n, C^1_n, ..., C^n_n, входящие в формулу (6), принято называть биномиальными коэффициентами, которые определяются так:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Из формулы (6) можно получить целый ряд свойств этих коэффициентов. Например, полагая $a = 1$, $b = 1$, получим:

$$2^n = C^0_n + C^1_n + C^2_n + C^3_n + ... + C^n_n,$$

т.е. формулу (4). Если положить $a = 1$, $b = -1$, то будем иметь:

$$0 = C^0_n - C^1_n + C^2_n - C^3_n + ... + (-1)^n C^n_n$$

или

$$C^0_n + C^2_n + C^4_n + ... = C^1_n + C^3_n + + C^5_n + ...$$

Это значит, что сумма коэффициентов чётных членов разложения равна сумме коэффициентов нечётных членов разложения; каждая из них равна 2^{n-1}.

Коэффициенты членов, равноудалённых от концов разложения, равны. Это свойства следует из соотношения: $C_n^k = C_n^{n-k}$

Интересен частный случай

$$(x+1)^n = C^0_n x^n + C^1_n x^{n-1} + ... + C^k_n x^{n-k} + ... + C^n_n x^0$$

или короче $(x+1)^n = \sum C_n^k x^{n-k}$.

1.3. Полиномиальная теорема

Теорема.

$$\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_k\right)^n = \sum_{\substack{a_1 \ge 0,\ a_2 \ge 0, \ldots a_k \ge 0 \\ a_1 + a_2 + \ldots a_k = n}} \frac{n!}{a_1!a_2!\ldots a_k!} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k}$$

Доказательство.

$$\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_k\right)^n = \underbrace{\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_k\right)\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_k\right)\ldots\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_k\right)}_{n}.$$

Чтобы после раскрытия скобок получился одночлен $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k}$, нужно выбрать те a_1 скобок, из которых берется x_1, те a_2 скобок, из которых берется x_2 и т.д. и те a_k скобок, из которых берется a_k. Коэффициент при этом одночлене после приведения подобных членов равен числу способов, которыми можно осуществить такой выбор. Первый шаг последовательности выборов можно осуществить $C_n^{a_1}$ способами, второй шаг – $C_{n-a_1}^{a_2}$, третий – $C_{n-a_1-a_2}^{a_2}$ и т.д., k-й шаг – $C_{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-1}}^{a_2}$ способами. Искомый коэффициент равен произведению

$$C_n^{a_1} C_{n-a_1}^{a_2} C_{n-a_1-a_2}^{a_3} \ldots C_{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-1}} =$$

$$= \frac{n!}{a_1!\left(n-a_1\right)!} \frac{\left(n-a_1\right)!}{a_2!\left(n-a_1-a_2\right)!} \times$$

$$\times \frac{\left(n-a_1-a_2\right)!}{a_3!\left(n-a_1-a_2-a_3\right)!} \times \ldots$$

$$\times \frac{\left(n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-1}\right)!}{a_k!\underbrace{\left(n-a_1-a_2-\ldots-a_k\right)!}=0!} = \frac{n!}{a_1!a_2!\ldots a_k!}.$$

2. Производные высших порядков

2.1. Понятие производных высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале. Тогда её производная $f'(x)$, вообще говоря, зависит от x, то есть является функцией от x. Следовательно, по отношению к ней снова можно ставить вопрос о существовании производной.

Определение. Производная от первой производной называется производной второго порядка или второй производной и обозначается символом y'' или $f''(x)$, то есть

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]'.$$

Определение. Производная от второй производной называется производной третьего порядка или третьей производной и обозначается символом y''' или $f'''(x)$.

Определение. Производной n-ого порядка функции $y = f(x)$ называется первая производная от производной $(n-1)$-го порядка данной функции и обозначается символом $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x).$$

Определение. Производные порядка выше первого называются высшими производными.

Замечание. Аналогично можно получить формулу *n*-й производной функции $y = \cos x$:

$$(\cos x)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot n\right).$$

Вторая производная параметрически заданной функции

Если функция задана параметрически уравнениями $x = \phi(t), y = \varphi(t)$, то для нахождения производной второго порядка нужно продифференцировать выражение для её первой производной, как сложной функции независимой переменной.

Так как

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}, \text{ то}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'(t)}{\phi'(t)}\right)\frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{\varphi''(t)\phi'(t) - \varphi'(t)\phi''(t)}{\phi'^{\,2}(t)}\cdot\frac{dt}{dx},$$

и с учетом того, что $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{\phi'(t)}$,

Получим

$$y'' = \frac{\varphi''(t)\phi'(t) - \varphi'(t)\phi''(t)}{\phi'^{\,3}(t)},$$

то есть $y''_{xx} = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$.

Аналогично можно найти третью производную

$$y'''_{xxx} = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}.$$

2.2. Дифференциал суммы, произведения и частного

Так как дифференциал получается из производной умножением её на дифференциал независимой переменной, то, зная производные основных элементарных функций, а также правила для отыскания производных, можно прийти к аналогичным правилам для отыскания дифференциалов.

1^0. Дифференциал постоянной равен нулю $dc = 0$.

2^0. Дифференциал алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равен алгебраической сумме дифференциалов этих функций

$$d(u + v - w) = du + dv - dw.$$

3^0. Дифференциал произведения двух дифференцируемых функций равен сумме произведений первой функции на дифференциал второй и второй функции на дифференциал первой $d(uv) = udv + vdu$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала $d(uc) = cdu$.

2.3. Функции, заданные параметрически, их дифференцирование

Определение. Функция $y = f(x)$ называется заданной параметрически, если обе переменные *x* и *y* определяются каждая в отдельности как однозначные функции от одной и той же вспомогательной переменной – параметра *t*:

$$x = \phi(t),$$
$$y = \varphi(t), \qquad (*)$$

где *t* изменяется в пределах $t_1 \le t \le t_2$.

Замечание. Приведем параметрические уравнения окружности и эллипса.

а) Окружность с центром в начале координат и радиусом *r* имеет параметрические уравнения:

$$x = r\cos t,$$
$$y = r\sin t,$$

где $0 \le t \le 2\pi$.

б) Запишем параметрические уравнения для эллипса:

$$x = a\cos t,$$
$$y = b\sin t,$$

где $0 \le t \le 2\pi$.

Исключив параметр *t* из параметрических уравнений рассматриваемых линий, можно прийти к их каноническим уравнениям.

Теорема. Если функция y от аргумента x задана параметрически уравнениями (*), где $\phi(t)$ и $\varphi(t)$ дифференцируемые по t функции и $\phi'(t) \neq 0$, то $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

2.4. Формула Лейбница

Для нахождения производной n-го порядка от произведения двух функций большое практическое значение имеет формула Лейбница.

Пусть u и v – некоторые функции от переменной x, имеющие производные любого порядка и $y=uv$. Выразим n-ю производную $y^{(n)}$ через производные функций u и v.

Имеем последовательно

$$y' = u'v + uv',$$

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Легко подметить аналогию между выражениями для второй и третьей производных и разложением бинома Ньютона соответственно во второй и третьей степенях, но вместо показателей степени стоят числа, определяющие порядок производной, а сами функции можно рассматривать как «производные нулевого порядка». Учитывая это, получим формулу Лейбница:

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}. \quad (2)$$

Эту формулу можно доказать методом математической индукции.

3. Применение формулы Лейбница

Для вычисления производной любого порядка от произведения двух функций, минуя последовательное применение формулы вычисления производной от произведения двух функций, применяется формула Лейбница.

С помощью этой формулы рассмотрим примеры вычисления производной n-го порядка от произведения двух функций.

Пример 1. Найти производную второго порядка функции

$$y(x) = x^3 + 7x^4 - 3x + 4$$

Решение .Согласно определению, вторая производная – это первая производная от первой производной, то есть

$$y''(x) = (y'(x))'.$$

Поэтому сначала найдем производную первого порядка от заданной функции согласно правилам дифференцирования и используя таблицу производных:

$$y'(x) = (x^3 + 7x^4 - 3x + 4)' =$$

$$= (x^3)' + (7x^4)' - (3x)' + (4)' =$$

$$= 3x^2 + 7(x^4)' - 3(x)' + 0 =$$

$$= 3x^2 + 7\cdot 4x^3 - 3\cdot 1 = 3x^2 + 28x^3 - 3.$$

Теперь найдем производную от производной первого порядка. Это будет искомая производная второго порядка:

$$y''(x) = (y'(x))' = (3x^2 + 28x^3 - 3)' =$$

$$= (3x^2)' + (28x^3)' - (3)' =$$

$$= 3(x^2)' + 28(x^3)' - 0 =$$

$$= 3\cdot 2x + 28\cdot 3x^2 = 6x + 84x^2.$$

Ответ: $y''(x) = 6x + 84x^2$.

Пример 2. Найти производную n-го порядка функции

$$y(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Решение. Будем последовательно находить производные первого, второго, третьего и так далее порядков заданной функции для того, чтобы установить закономерность, которую можно будет обобщить на n-ю производную.

Производную первого порядка находим как производную частного:

$$y'(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{(x)'(1-x) - x(1-x)'}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}}.$$

Здесь выражение $n!$ называется факториалом числа . Факториал числа равен произведению чисел от одного до n, то есть

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Производная второго порядка есть первая производная от первой производной, то есть

$$y''(x) = \left(y'(x)\right)' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \left((1-x)^{-2}\right)' =$$

$$= \left((1-x)^{-2}\right)' = -2(1-x)^{-3}(1-x)' = \frac{(-2)(-1)}{(1-x)^3} =$$

$$= \frac{2}{(1-x)^3} = \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3} = \frac{2!}{(1-x)^{2+1}}.$$

Производная третьего порядка:

$$y'''(x) = \left(y''(x)\right)' = \left(\frac{2}{(1-x)^3}\right)' =$$

$$= \left(2(1-x)^{-3}\right)' = 2\left((1-x)^{-3}\right)' =$$

$$= 2\left((1-x)^{-3}\right)' = 2(-3)(1-x)^{-4}(1-x)' =$$

$$= \frac{2(-3)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{6}{(1-x)^4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1-x)^4} = \frac{3!}{(1-x)^{3+1}}$$

Четвертая производная:

$$y^{(4)}(x) = \left(y'''(x)\right)' = \left(\frac{6}{(1-x)^4}\right)' =$$

$$= \left(6(1-x)^{-4}\right)' =$$

$$= 6\left((1-x)^{-4}\right)' = 6(-4)(1-x)^{-5}(1-x)' =$$

$$= \frac{6(-4)(-1)}{(1-x)^5} = \frac{24}{(1-x)^5} = \frac{4!}{(1-x)^{4+1}}.$$

Заметим закономерность: в числителе стоит факториал числа, которое равно порядку производной, а в знаменателе выражение $1–x$ в степени на единицу больше, чем порядок производной, то есть

$$y^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \ \forall n \in N$$

Ответ: $y^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \ \forall n \in N$.

Пример 3. Найти значение третьей производной функции

$$y(x) = e^{2x-1}$$

в точке $x=0$.

Решение. Согласно таблице производных высших порядков, имеем:

$$\left(e^{kx+b}\right)^n = k^n e^{kx+b}.$$

В рассматриваемом примере

$$kx+b=2x–1,\ k=2,\ n=3,$$

то есть получаем

$$y'''(x) = 2^3 e^{2x-1} = 8e^{2x-1}.$$

Заметим, что подобный результат можно было бы получить и при последовательном нахождении производных.

В заданной точке $x=0$ третья производная равна:

$$y'''(0) = 8e^{2 \cdot 0-1} = 8e^{-1} = \frac{8}{e}.$$

Ответ: $y'''(0) = \dfrac{8}{e}$.

Пример 4. Найти вторую производную функции

$$y(x) = x\ln(2x+3).$$

Решение. Для начала найдем первую производную:

$$y'(x) = \left(x\ln(2x+3)\right)' = (x)'\ln(2x+3) + x\left(\ln(2x+3)\right)' =$$

$$= 1\ln(2x+3) + x\frac{1}{2x+3}(2x+3)' = \ln(2x+3) +$$

$$+ \frac{x}{2x+3}\left[(2x)' + (2)'\right] = \ln(2x+3) + \frac{x}{2x+3}\left[2(x)' + 0\right] =$$

$$= \ln(2x+3) + \frac{x}{2x+3}2 \cdot 1 = \ln(2x+3) + \frac{2x}{2x+3}.$$

Для нахождения второй производной продифференцируем выражение для первой производной еще раз:

$$y''(x)=\left(y'(x)\right)'=\left(\ln(2x+3)+\frac{2x}{2x+3}\right)'=$$

$$=\left(\ln(2x+3)\right)'+\left(\frac{2x}{2x+3}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2x+3}(2x+3)'+\frac{(2x)'(2x+3)-2x(2x+3)'}{(2x+3)^2}=$$

$$=\frac{1}{2x+3}\left[(2x)'+(3)'\right]+\frac{(2x)'(2x+3)-2x\left[(2x)'+(3)'\right]}{(2x+3)^2}=$$

$$=\frac{1}{2x+3}\left[2(x)'+0\right]+\frac{2\cdot1\cdot(2x+3)-2x\left[2(x)'+0\right]}{(2x+3)^2}=$$

$$=\frac{1}{2x+3}2\cdot1+\frac{2(2x+3)-2x\cdot2\cdot1}{(2x+3)^2}=$$

$$=\frac{2}{2x+3}+\frac{4x+6-4x}{(2x+3)^2}=\frac{2}{2x+3}+\frac{6}{(2x+3)^2}=$$

$$=\frac{2(2x+3)+6}{(2x+3)^2}=\frac{4x+6+6}{(2x+3)^2}=\frac{4x+12}{(2x+3)^2}=\frac{4(x+3)}{(2x+3)^2}.$$

Ответ: $y''(x)=\dfrac{4(x+3)}{(2x+3)^2}$.

Пример 5. Найти $y^{(4)}(x)$, если $y(x)=e^{4x}\sin 3x$.

Так как заданная функция представляет собой произведение двух функций

$$u(x)=e^{4x},\ v(x)=\sin 3x,$$

то для нахождения производной четвертого порядка целесообразно будет применить формулу Лейбница:

$$y^{(4)}(x)=\left(e^{4x}\right)^{(4)}\sin 3x+C_4^1\left(e^{4x}\right)^{(3)}(\sin 3x)'+$$

$$+C_4^2\left(e^{4x}\right)''(\sin 3x)''+C_4^3\left(e^{4x}\right)'(\sin 3x)^{(3)}+e^{4x}(\sin 3x)^{(4)}.$$

Найдем все производные и посчитаем коэффициенты при слагаемых.

1) Посчитаем коэффициенты при слагаемых:

$$C_4^1=\frac{4!}{1!(4-1)!}=\frac{4!}{3!}=\frac{3!\cdot4}{3!}=4;$$

$$C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{4!}{2!\cdot2!}=\frac{2!\cdot3\cdot4}{2!\cdot2!}=\frac{3\cdot4}{2}=6;$$

$$C_4^3=\frac{4!}{3!(4-3)!}=\frac{4!}{3!}=\frac{3!\cdot4}{3!}=\frac{3!\cdot4}{3!}=4;$$

2) Найдем производные от функции $u(x)$:

$$u(x)=e^{4x},\ u'(x)=\left(e^{4x}\right)'=e^{4x}(4x)'=e^{4x}\cdot 4\cdot(x)'=4e^{4x};$$

$$u''(x)=\left(u'(x)\right)'=\left(4e^{4x}\right)'=4\left(e^{4x}\right)'=16e^{4x};$$

$$u'''(x)=\left(u''(x)\right)'=\left(16e^{4x}\right)'=64e^{4x};$$

$$u^{(4)}(x)=\left(u'''(x)\right)'=\left(64e^{4x}\right)'=256e^{4x};$$

3) Найдем производные от функции $v(x)$:

$$v(x)=\sin 3x,\ v'(x)=(\sin 3x)'=\cos 3x(3x)'=3\cos 3x$$

$$v''(x)=\left(v'(x)\right)'=(3\cos 3x)'=3(\cos 3x)'=$$

$$=3(-\sin 3x)(3x)'=-9\sin 3x.$$

$$v'''(x)=\left(v''(x)\right)'=-27\cos 3x,$$

$$v^{(4)}(x)=\left(v'''(x)\right)'=81\sin 3x$$

Тогда

$$y^{(4)}(x)=256e^{4x}\sin 3x+4\cdot 64e^{4x}\cdot 3\cos 3x+$$

$$+6\cdot 16e^{4x}(-9\sin 3x)+4\cdot 4e^{4x}(-27\cos 3x)+e^{4x}81\sin 3x=$$

$$=e^{4x}(336\cos 3x-527\sin 3x)$$

Ответ: $y^{(4)}(x)=e^{4x}(336\cos 3x-527\sin 3x)$.

Пример 6. Дана функция $y=x^2\cos 3x$. Найти производную третьего порядка.
Решение. Пусть $u=\cos 3x$, $v=x^2$. Тогда по формуле Лейбница находим:

$$y'''=\sum_{i=0}^{3}C_3^i u^{(3-i)}v^{(i)}=\sum_{i=0}^{3}C_3^i(\cos 3x)^{(3-i)}\left(x^2\right)^{(i)}$$

Производные в этом выражении имеют вид:

$$(\cos 3x)'=-3\sin 3x,$$
$$(\cos 3x)''=(-3\sin 3x)'=-9\cos 3x,$$
$$(\cos 3x)'''=(-9\cos 3x)'=27\sin 3x,$$
$$(x^2)'=2x,$$
$$(x^2)''=2,$$
$$(x^2)'''=0.$$

Следовательно, третья производная заданной функции равна

$$y'''=C_3^0(\cos 3x)'''x^2+C_3^1(\cos 3x)''\left(x^2\right)'+C_3^2(\cos 3x)'\left(x^2\right)''+C_3^2\cos 3x\left(x^2\right)'''=$$

$$=1\cdot 27\sin 3x\cdot x^2+3\cdot(-9\cos 3x)\cdot 2x+3\cdot(-3\sin 3x)\cdot 2+1\cdot\cos 3x\cdot 0=$$

$$=27x2\sin 3x-54x\cos 3x-18\sin 3x=(27x^2-18)\sin 3x-54x\cos 3x.$$

Пример 7. Найти производную n-го порядка функции $y=x^2\cos x$.
Решение. Воспользуемся формулой Лейбница, полагая $u=\cos x$, $v=x^2$. Тогда

$$\left(x^2\cos x\right)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(n-i)}v^{(i)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\left(\cos x\right)^{(n-i)}\left(x^2\right)^{(i)}=$$

$$=C_n^0\left(\cos x\right)^{(n)}x^2+C_n^1\left(\cos x\right)^{(n-1)}\left(x^2\right)'+C_n^2\left(\cos x\right)^{(n-2)}\left(x^2\right)''+\ldots$$

Остальные члены ряда равны нулю, поскольку $(x^2)^{(i)}=0$ при $i>2$.
Производная n-го порядка функции косинус:

$$\left(\cos x\right)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$$

Следовательно, производная нашей функции равна

$$\left(x^2\cos x\right)^{(n)}=C_n^0\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)x^2+C_n^1\cos\left(x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)2x+C_n^2\cos\left(x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right)2=$$

$$=x^2\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)+2nx\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2n(n-1)}{2}\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}-\pi\right)=$$

$$=x^2\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)+2nx\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-n(n-1)\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)=$$

$$=\left[x^2-n(n-1)\right]\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)+2nx\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right).$$

Заключение

В школе изучаются и используются так называемые формулы сокращенного умножения: квадраты и кубы суммы и разности двух выражений и формулы разложения на множители разности квадратов, суммы и разности кубов двух выражений. Обобщением этих формул является формула, называемая формулой бинома Ньютона и формулы разложения на множители суммы и разности степеней. Эти формулы часто используются в решении различных задач: на доказательство делимости, сокращение дробей, приближенные вычисления. Рассмотрены интересные свойства треугольника Паскаля, которые тесно связаны с биномом Ньютона.

В работе систематизирована информация по теме, приведены примеры задач на применение бинома Ньютона и формул суммы и разности степеней. Работа может быть использована в работе математического кружка, а также для самостоятельного изучения темы, кто увлекается математикой.

Список литературы

1. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969.

2. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций базовый и углубленный уровни – М.: Просвещение, 2014. – 431 с.

3. Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей. 7–9 кл. / автор-составитель В.Н. Студенецкая. – изд. 2–е., испр., – Волгоград: Учитель, 2009.

4. Савушкина И.А., Хугаев К.Д., Тишкин С.Б. Алгебраические уравнения высших степеней: методическое пособие для слушателей межвузовского подготовительного отделения. – СПб., 2001.

5. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учебное пособие для 10 кл. средней школы. – М.: Просвещение, 1989.

6. Бином Ньютона и треугольник Паскаля // Наука и жизнь [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.nkj.ru/archive/articles/13598/.