ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ДЛЯ ОБОСНОВАНИЯ И ПОЛУЧЕНИЯ ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ»

Власенко Б.Н.

г.о. г. Урюпинск Волгоградской области, МБОУ «Гимназия» 10 класс

Руководитель: Шарова С.Г., г.о. г. Урюпинск Волгоградской области, МБОУ «Гимназия», учитель математики

...Основные результаты математики чаще выражаются неравенствами, а не равенствами.

Э. Беккенбах, *Р. Беллман.*
«Введение в неравенства»

Неравенства играют фундаментальную роль в большинстве разделов современной математики, без них не может обойтись ни физика, ни математическая статистика, ни экономика. Однако до сих пор нет хорошо разработанной достаточно общей «теории неравенств», хотя для обоснования отдельных классов неравенств такую теорию удалось создать – это и некоторые разделы выпуклого анализа, и теория мажоризации, и ряд других. Так или иначе, но неравенства встречаются как в классических разделах математики (в геометрии, в дифференциальном и интегральном исчислении, в теории чисел), так и в достаточно современных ее разделах (теория автоматов, теория кодирования). Существует много методов доказательства неравенств. Один из них – применение интеграла.

Цель работы: разработать рекомендации по применению интеграла при доказательстве неравенств некоторого типа.

Объект исследования: неравенства.

Предмет исследования: неравенства.

Гипотеза: применение разработанных рекомендаций при решении неравенств с помощью интеграла будет способствовать более широкому использованию интеграла на практике.

Задачи:

1. Провести анализ учебной и учебно-методической литературы.
2. Рассмотреть геометрический смысл определенного интеграла и свойства монотонности функции.
3. Рассмотреть наиболее распространенные методы оценки площади подграфика.
4. Рассмотреть конкретные примеры доказательства неравенств.

Методы исследования:

1. Анализ учебной, учебно-методической литературы.
2. Теоретические методы: анализ и синтез, сравнение, обобщение.

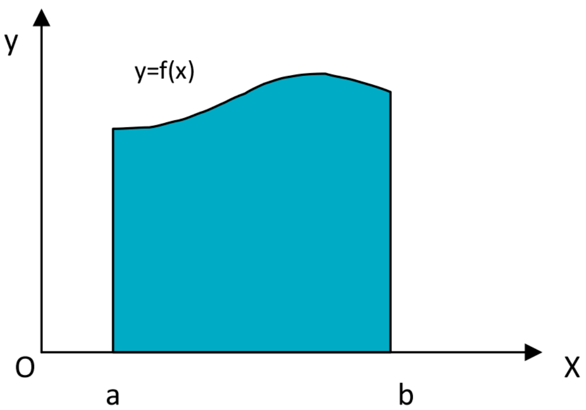
Применение интеграла при доказательстве неравенств базируется на применении геометрического смысла определенного интеграла и монотонности площади.

1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции выражается формулой

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

(геометрический смысл определенного интеграла).

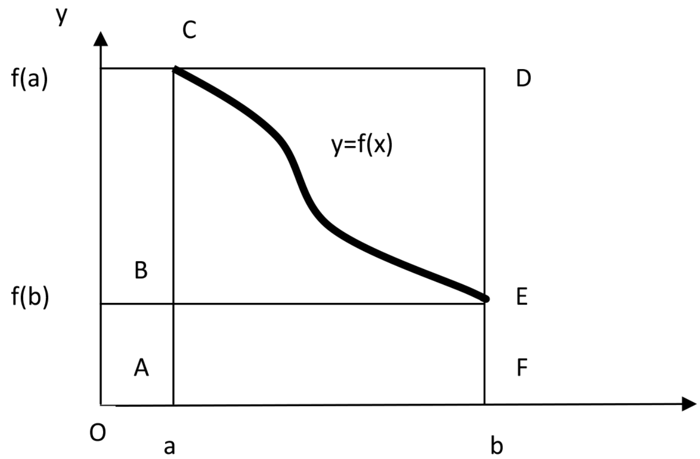
2. Если фигура F_1 содержится в фигуре F, то ее площадь S_1 меньше, чем площадь S фигуры F, т. е. если $F_1 \subset F$, то $S_1 < S$ (свойство монотонности площади).



Некоторые наиболее распространенные методы оценки площади подграфика

Метод прямоугольников

Пусть f – монотонная функция, заданная на отрезке $[a;b]$. Для определенности будем считать, что f строго убывает.



Площадь подграфика можно оценить сверху и снизу площадями многоугольников *ACDF* и *ABEF* соответственно, т. е.

$$f\left(b\right)\cdot(b-a)<\int_a^b f(x)dx<f\left(a\right)\cdot(b-a). \quad (1)$$

Для получения более точных оценок отрезок $[a;b]$ разбивают на несколько кусочков, на каждом из которых пишут оценки (1). Например, рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

на промежутке $[1;n]$, где $n\in N$. Разбивая этот промежуток на отрезки $[1;2]$, $[2;3]$, …, $[n–1;n]$ и применяя оценку (1) на каждом из них, получаем

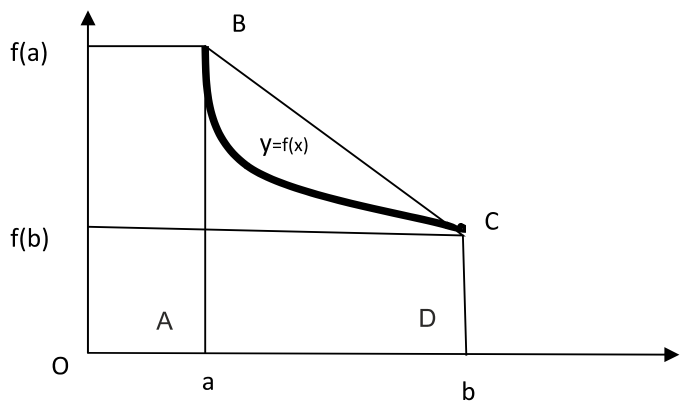
$$\frac{1}{2}<\int_1^2\frac{dx}{x}<1,\frac{1}{3}<\int_2^3\frac{dx}{x}<\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n}<\int_{n-1}^n\frac{dx}{x}<\frac{1}{n-1}.$$

Тем самым

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<\int_1^n\frac{dx}{x}<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$$

Метод трапеций

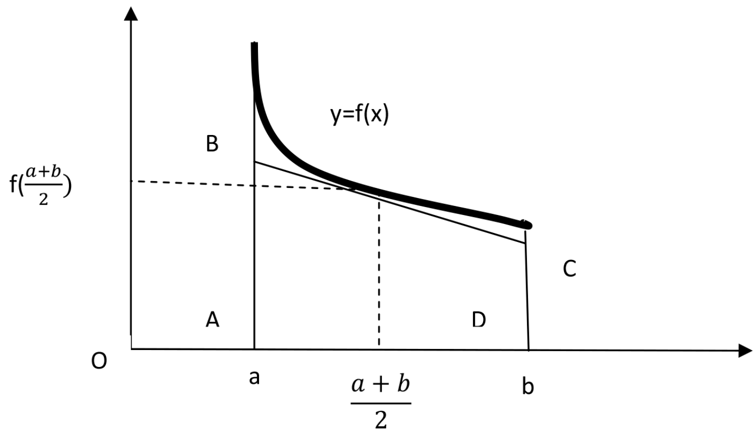
Более точные оценки получаются при помощи метода трапеций.



Пусть функция f, заданная на отрезке $[a;b]$, строго выпуклая, т. е. для любых точек x, y из отрезка $[a;b]$ хорда, соединяющая точки графика $(x, f(x))$ и $(y, f(y))$, лежит выше соответствующей части графика. Так как площадь подграфика меньше площади трапеции $ABCD$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx < \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a).$$

Для получения оценки снизу проведем касательную к графику в точке с абсциссой $\frac{a+b}{2}$.



Так как площадь подграфика больше площади трапеции $ABCD$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx > f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a).$$

Таким образом, для строго выпуклых функций справедливы оценки

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a) \qquad (2)$$

Как и в методе прямоугольников, для получения более точных оценок интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

промежуток $[a;b]$ разбивают на несколько кусочков, на каждом из которых пишут оценки (2). Например, для той же самой функции

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

на промежутке $[1;n]$, где $n \in N$ получим оценки

$$\frac{2}{1+2} < \int_1^2 \frac{dx}{x} < \frac{1+\frac{1}{2}}{2},$$

$$\frac{2}{2+3} < \int_2^3 \frac{dx}{x} < \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2}, \ldots, \frac{2}{n-1+n} < \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} < \frac{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}}{2}$$

Тем самым

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\ldots+\frac{2}{2n-1}<\int_1^n \frac{dx}{x}<\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)+\frac{1}{2n}.$$

Рассмотрим несколько задач,нацеленных на применение описанных методов.

Задача 1. Пусть n – натуральное число и $n \geq 2$. Докажите, что в таком случае справедливы неравенства

$$\frac{3n+1}{2n+2} \cdot n^n < 1^n + 2^n + \ldots + n^n < 2n^n.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x)=x^n$ на отрезке $[0;n]$. Правое неравенство получим, оценивая интеграл

$$\int_0^n f(x)\,dx$$

снизу по методу прямоугольников:

$$\int_0^n f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)dx+\ldots+\int_{n-1}^n f(x)\,dx>f(0)+f(1)+\ldots+f(n-1),$$ т. е.

$$\frac{n^{n+1}}{n+1}>1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n.$$

Отсюда получаем

$$1^n+2^n+\ldots+n^n<\frac{n^{n+1}}{n+1}+n^n<2n^n.$$

Для доказательства левого неравенства оценим интеграл сверху по методу трапеций.

$$\int_0^n f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)dx+\ldots+$$
$$+\int_{n-1}^n f(x)\,dx<\frac{f(0)+f(1)}{2}+\frac{f(1)+f(2)}{2}+\ldots+\frac{f(n-1)+f(n)}{2}=$$
$$=0{,}5f(0)+\big(f(1)+f(2)+\ldots f(n-1)\big)+0{,}5f(n),$$

т. е. $$\frac{n^{n+1}}{n+1}<1^n+2^n+\ldots+(n-1)^n+0{,}5n^n.$$

Прибавив $0{,}5n^n$ к обеим частям этого неравенства и выполнив преобразования, установим, что

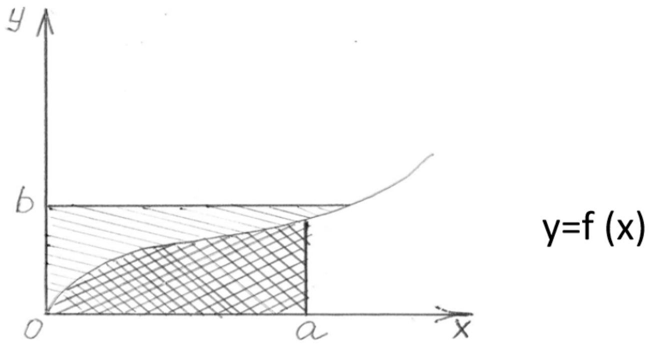
$$\frac{3n+1}{2n+2} \cdot n^n < 1^n + 2^n + \ldots + n^n < 2n^n.$$

Проанализируем это решение. Оно разбивается на два этапа. Сначала мы подобрали нужную функцию, а затем оценили описанными методами интеграл от нее. (Приложение 1).

Использование интеграла для доказательства неравенств не исчерпывается рассмотренными выше типами неравенств. Интеграл находит применение в доказательствах более сложных неравенств. Одно из таких применений основано на соотношении, которое называется неравенством Юнга.

Неравенство Юнга

Пусть f и g – строго возрастающие взаимно обратные функции, заданные на промежутке $[0;\infty)$, причем такие, что $f(0) = g(0) = 0$. Пусть a и b – положительные числа. Фигура, изображенная на рисунке состоит из двух частей.



Площадь той части, которая заштрихована в клетку, равна

$$\int_0^a f\left(x\right)dx.$$

А та часть, что заштрихована в линейку, имеет площадь, равную $\int_0^b g\left(x\right)dx$. Нетрудно понять, что площадь всей фигуры всегда не меньше чем ab. Таким образом, мы получили следующую теорему (неравенство Юнга): Если f и g – строго возрастающие, заданные на луче $[0;\infty)$, взаимно обратные функции такие, что $f(0) = g(0) = 0$, то для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$\int_0^a f\left(x\right)dx + \int_0^b f\left(x\right)dx \geq ab.$$

Задача 2. Докажите неравенство

$$9 < \int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\,dx + \int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\,dx < 9{,}0001.$$

Доказательство. Рассмотрим функции

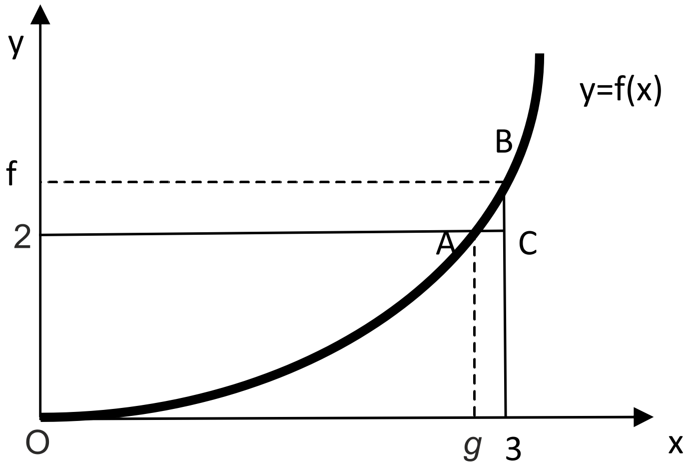
$$f(x) = \sqrt[4]{x^4+1} - 1,$$

$$g(x) = \sqrt[4]{(x+1)^4-1} \quad (x \geq 0).$$

Перепишем неравенство в виде

$$6 < \int_0^3 f\left(x\right)dx + \int_0^2 g\left(x\right)dx < 6{,}0001.$$

Функции f и g удовлетворяют условиям неравенства Юнга: они взаимно обратны, строго возрастают и $f(0) = g(0) = 0$, значит справедливо левое неравенство. Для доказательства правого построим график функции f.



Пусть S – площадь криволинейного треугольника, ограниченного графиком функции $y=f(x)$ и прямыми $x=3$, $y=2$. Так как

$$\int_0^3 f(x)\,dx + \int_0^2 g(x)\,dx = 6+S,$$

то остается доказать, что $S<0{,}0001$.

Криволинейный треугольник ABC, у которого $A(g(2);2)$, $B(3;f(3))$, $C(3;2)$, содержится в прямоугольнике, ограниченном прямыми

$$x=3,\ x=g(2)=\sqrt[4]{80},\ y=2,$$

$$y=f(3)=\sqrt[4]{82}-1.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\left(3-\sqrt[4]{80}\right)\left(\sqrt[4]{82}-3\right)<0{,}0001.$$

Последнее неравенство следует из того, что

$$\sqrt[4]{80}>2.99,\sqrt[4]{82}<3{,}01.$$

Проиллюстрируем применение интеграла при решении следующих задач (Приложение 2).

Задача 3. Доказать неравенство

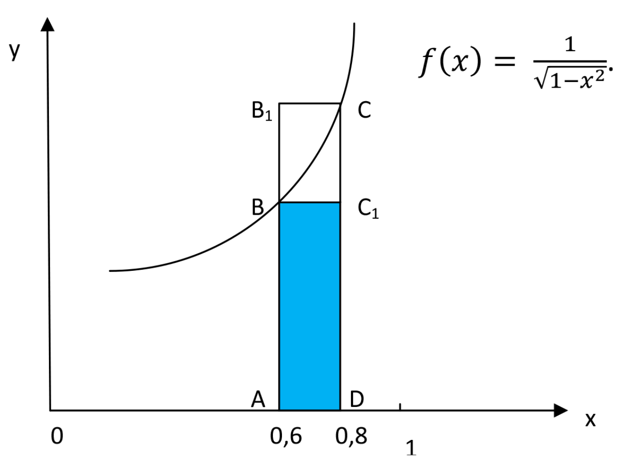
$$\frac{1}{4}<\arcsin 0{,}8-\arcsin 0{,}6<\frac{1}{3}.$$

Доказательство. Разность арксинусов есть не что иное, как значение определенного интеграла:

$$\arcsin 0{,}8-\arcsin 0{,}6=\int_{0{,}6}^{0{,}8}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

равного площади криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной сверху графиком функции

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



Так как

$$f(0,6)=\frac{5}{4},\ f(0,8)=\frac{5}{3},$$

то $S_1 = 0,2\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$ есть площадь прямоугольника AB_1CD, $S_2 = 0,2\cdot\frac{5}{4}=\frac{1}{4}$ есть площадь прямоугольника ABC_1D и при этом $S_2 < S < S_1$. Неравенство доказано.

Задача 4. Доказать, что справедливы неравенства:

а) $\sin 20° < \frac{7}{20}$;

б) $\sin 20° > \frac{1}{3}$.

Доказательство.

а) Так как

$$\sin 20° = \sin\frac{\pi}{9} = \int_0^{\frac{\pi}{9}} \cos x dx = S,$$

где S – площадь криволинейной трапеции $OACD$, а площадь прямоугольника $OABD$ (содержащего криволинейную трапецию $OACD$) равна

$$S_1 = \frac{\pi}{9},$$

то $$\sin 20° < \frac{\pi}{9}.$$

Из справедливости неравенства $\frac{\pi}{9}<\frac{7}{20}$ следует справедливость неравенства $\sin 20° < \frac{7}{20}$.

б) Пусть S_2 – площадь прямоугольной трапеции $OACD$, содержащейся в криволинейной трапеции $OACD$. Тогда

$$S_2 = \frac{1+\cos\frac{\pi}{9}}{2}\cdot\frac{\pi}{9}$$

и $S_2 < S$, т. е.

$$\frac{1+\cos\frac{\pi}{9}}{2}\cdot\frac{\pi}{9} < \sin\frac{\pi}{9}.$$

Решим полученное неравенство относительно $\sin\frac{\pi}{9}$. Положим $\sin\frac{\pi}{9} = a > 0$, тогда $\cos\frac{\pi}{9} = \sqrt{1-a^2}$ и неравенство принимает вид $\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}\cdot\frac{\pi}{9} < a$.

Решим это неравенство (a>0), получим, что

$$a > \frac{36\pi}{\pi^2+18^2}.$$

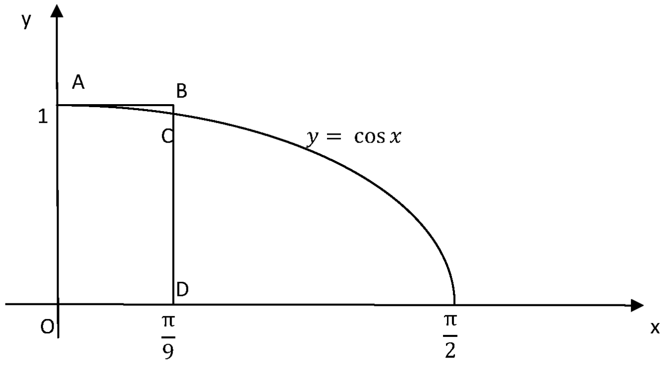
Следовательно,

$$\sin\frac{\pi}{9} > \frac{36\pi}{\pi^2+18^2} > \frac{36\cdot 3,1}{324+3,2^2} = \frac{111,6}{334,24} > 0,3338 > \frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\sin 20° > \frac{1}{3}$.

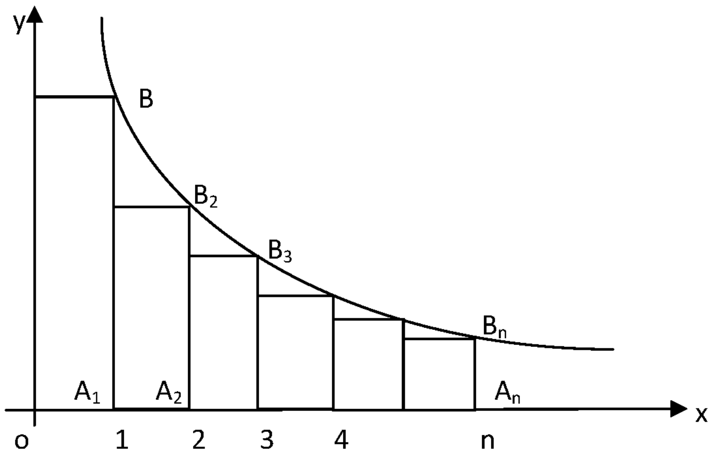
Задача 5. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$$



Доказательство. В этом неравенстве каждое слагаемое левой части можно рассматривать как площадь прямоугольника с единичным основанием и высотой, равной соответственно

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3\sqrt{2}},\frac{1}{4\sqrt{3}},\frac{1}{5\sqrt{4}},\ldots,\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}.$$



Для построения этих прямоугольников сначала построим график функции

$$f\left(x\right)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

При доказательстве таких неравенств важно надлежащим образом выбрать криволинейную трапецию, в которой содержится ступенчатая фигура, составленная из этих прямоугольников. Изначально понятно, что нельзя воспользоваться криволинейной трапецией с основанием OA_n, так как функция f в окрестности точки x=0 не ограничена, а криволинейная трапеция – бесконечная. Поэтому исходное неравенство запишем следующим образом:

$$\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<\frac{3}{2}. \quad (2)$$

Теперь ничто не мешает сравнить левую часть неравенства (2) с площадью

$$S_1=\int_1^n\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$$

криволинейной трапеции $A_1B_1B_nA_n$. Однако, вычисляя интеграл с помощью подстановки $\sqrt{x}=t$, получаем неравенство $S_1<\frac{\pi}{2}$, не дающее оснований утверждать, что $S<\frac{3}{2}$. Главной причиной этого является существенное отличие между площадью криволинейной трапеции $A_1B_1B_2A_2$ и площадью содержащегося в ней прямоугольника, которое образуется за счет быстрого изменения функции f на промежутке [1;2]. Чуть меньшей, но все же ощутимой является разность между площадью криволинейной трапеции $A_2B_2B_3A_3$ и площадью соответствующего прямоугольника. Поэтому остановимся на криволинейной трапеции $A_3B_3B_nA_n$ и вычислим ее площадь S_3.

$$S_3=\int_3^n\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{n}}\frac{2dt}{t^2+1}=$$

$$=2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{n}-\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)<2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Так как

$$\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{4}}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3},$$

а $\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{\pi}{3}=$

$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+4\pi}{12}<\frac{2\cdot1,5+1,8+4\cdot3,15}{12}=1,45<\frac{3}{2},$$

то неравенство доказано (Приложение 3).

Заключение

Все рассмотренные задачи интеграл объединил общим способом решения. Этот способ нагляден, изящен и эффективен. Автор полагает, что работа может быть использована учителями и учащимися общеобразовательных школ на факультативных занятиях, при подготовке к математическим олимпиадам, сдаче ЕГЭ, вступительным экзаменам в технические учебные заведения.

Список литературы

1. Алексеев Р.Б., Курляндчик Л.Д. Неравенства и интеграл // Математика в школе. – 1993. – №2. – С. 53–56.

2. Бродский Я.С., Слипенко А.К. Производная и интеграл в неравенствах, уравнениях, тождествах. – Киев: Выща шк. Головное изд-во, 1988.

3. Васильева Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, 1985.

4. Вороной А.Н. Интеграл помогает доказывать неравенства. – М., 2000. – №4. – С. 66–70.

5. Морозова Е.И., Петраков И.С. Международные математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1971.

Приложение 1

Задача 1. Числа *n,m* натуральные, $m > n > 2$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{m^2}<\frac{2}{2n-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $y=\frac{1}{x^2}$ $(x>0)$. Это убывающая строго выпуклая функция. Оценим интеграл $\int_n^m f(x)dx$ снизу по методу трапеций. Этот метод приводит к неравенству

$$\int_n^m f(x)dx=\int_n^{n+1} f(x)dx+\int_{n+1}^{n+2} f(x)dx+\ldots+$$
$$+\int_{m-1}^{m} f(x)dx>f(n+0,5)+f(n+1,5)+\ldots+$$
$$+f(m-0,5).$$

Но эта оценка нас не устраивает, так как не позволяет оценить сумму

$$f(n)+f(n+1)+\ldots+f(m).$$

Для получения такой суммы нужно рассмотреть интеграл $\int_{n-0,5}^{m+0,5} f(x)dx$. Действительно,

$$\int_{n-0,5}^{m+0,5} f(x)dx=\int_{n-0,5}^{n+0,5} f(x)dx+\ldots+$$
$$+\int_{m-0,5}^{m+0,5} f(x)dx>f(n)+f(n+1)+\ldots+f(m),$$

т. е.

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{m^2}<\int_{n-0,5}^{m+0,5} x^{-2}dx=$$
$$=\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2m+1}<\frac{2}{2n-1}.$$

Такой прием, связанный с оценкой суммы вида $f(n)+f(n+1)+\ldots+f(m)$, очень полезен и часто применяется. Он позволяет оценивать такую сумму сверху, если f – выпуклая функция, и снизу, если f – вогнутая функция.

Задача 2. Для натурального *n*, которое не меньше 2, докажите неравенства

$$\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}-\frac{\sqrt{2}}{6}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+$$
$$+\sqrt{n}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}-\frac{1}{6} \qquad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x}$ $(x>0)$. Это возрастающая строго вогнутая функция. Правое неравенство получим, оценивая интеграл $\int_1^n f(x)dx$ снизу по методу трапеций:

$$\int_1^n f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\ldots+\int_{n-1}^n f(x)dx>$$
$$>\frac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+\ldots f(n-1)+\frac{1}{2}f(n),$$

$$\text{т. е. } \frac{2}{3}n\sqrt{n}-\frac{2}{3}>\frac{1}{2}\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n-1}+\frac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Если к обеим частям этого неравенства прибавить выражение 0,5 +0,5 $\sqrt{n}$, то неравенство примет вид

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}<\frac{4n\sqrt{n}-4+3+3\sqrt{n}}{6}.$$

Итак, правое из неравенств (3) доказано.

Докажем левую часть. Будем оценивать теперь интеграл $\int_{0,5}^n f(x)dx$ с помощью интегралов $\int_{0,5}^{n-0,5} f(x)dx$ и $\int_{n-0,5}^{n} f(x)dx$. Причем первый из них оценим по методу трапеций, а второй – по методу прямоугольников:

$$\int_{0,5}^n f(x)dx=\int_{0,5}^{n-0,5} f(x)dx+\int_{n-0,5}^{n} f(x)dx=$$
$$=\int_{0,5}^{1,5} f(x)dx+\int_{1,5}^{2,5} f(x)dx+\ldots+\int_{n-1,5}^{n-0,5} f(x)dx+$$
$$+\int_{n-0,5}^{n} f(x)dx<f(1)+f(2)+f(3)+\ldots f(n-1)+\frac{1}{2}f(n).$$

Поскольку $f(x)=\sqrt{x}$ $(x>0)$, из последнего неравенства следует, что

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1}+\frac{1}{2}\sqrt{n}>\frac{2}{3}n\sqrt{n}-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Отсюда и получаем левое из неравенств (3).

Приложение 2

Задача 3. Доказать неравенство

$$\frac{1}{52} < \ln\frac{52}{51} < \frac{1}{51}.$$

Доказательство. Справедливость неравенства очевидна, если учесть, что $\frac{1}{52}$ и $\frac{1}{51}$ – площади прямоугольников, а $\ln\frac{52}{51} = \ln 52 - \ln 51 = \int_{51}^{52}\frac{dx}{x}$ – площадь криволинейной трапеции.

Решение.

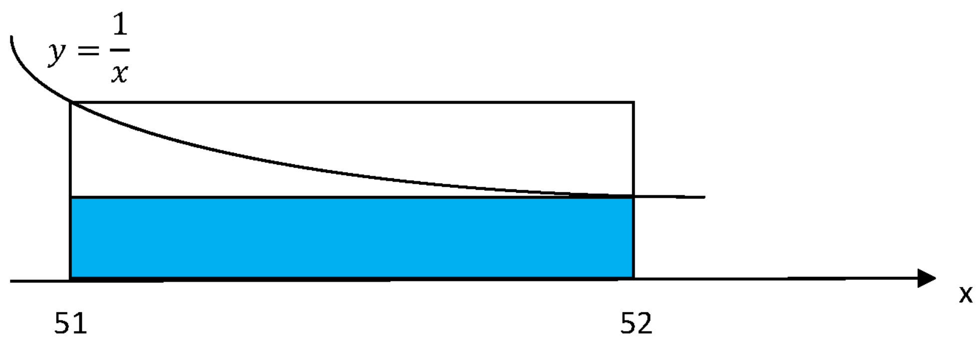
Так как

$$\ln\frac{101}{100} = \ln\frac{202}{200} =$$

$$= \ln 202 - \ln 200 = \int_{200}^{202}\frac{dx}{x} = S,$$

где S – площадь криволинейной трапеции, а

$$\frac{2}{201} = S_1,$$

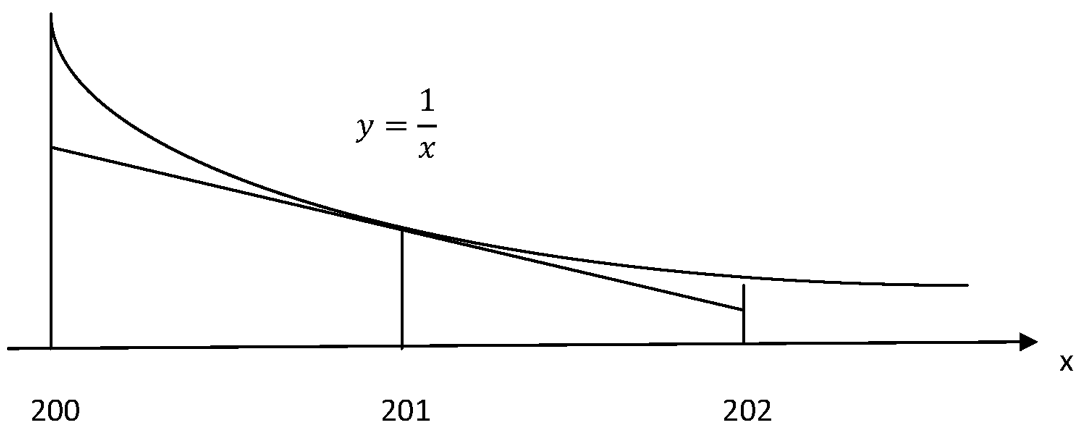


Задача 4. Какое из чисел больше,

$$\frac{2}{201} \text{ или } \ln\frac{101}{100}.$$

где S_1 – площадь криволинейной трапеции, содержащейся в ней, то $S_1 < S$ и, следовательно,

$$\ln\frac{101}{100} > \frac{2}{201}.$$



Приложение 3

Задача 5. Доказать, что

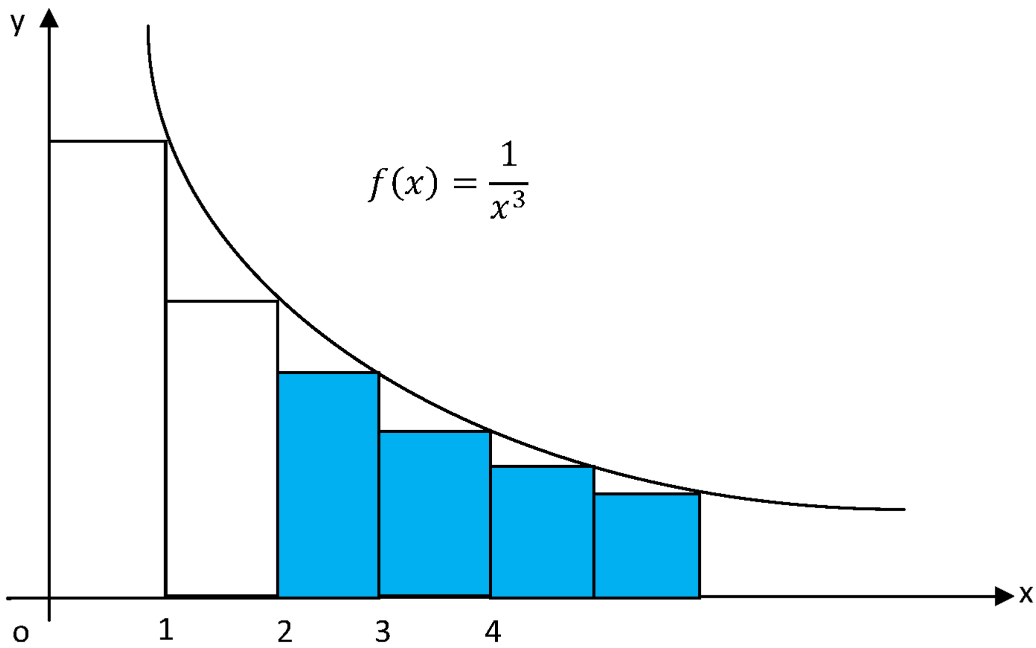
$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}.$$

Доказательство.

Построим график функции

$$f(x)=\frac{1}{x^3},\ x>0$$

и прямоугольники с единичными основаниями, площади которых равны соответственно слагаемым левой части неравенства.



Перепишем неравенство в виде

$$\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{8}.$$

Так как площадь заштрихованной ступенчатой фигуры меньше площади криволинейной трапеции, в которой она содержится, то

$$\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\int_2^n\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2n^2}<\frac{1}{8}.$$

Неравенство доказано.

Задача 7. Доказать, что

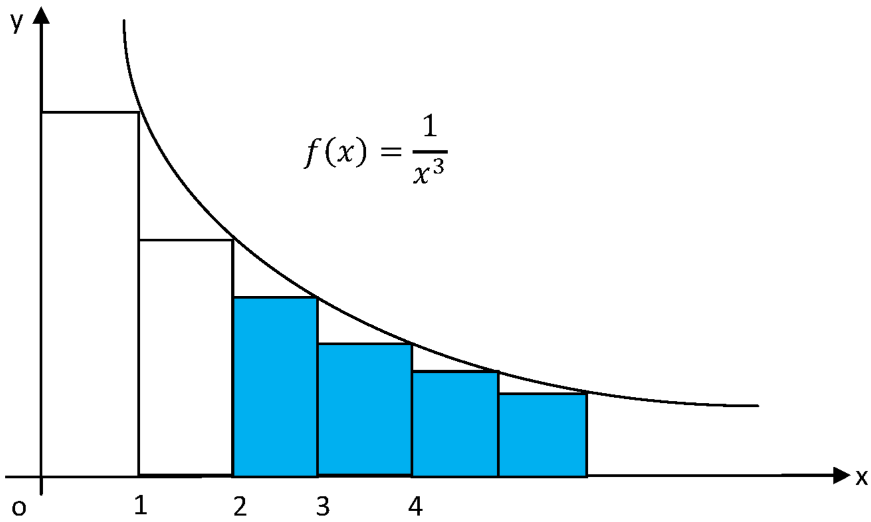
$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}.$$

Доказательство.

Построим график функции

$$f(x)=\frac{1}{x^3},\ x>0$$

и прямоугольники с единичными основаниями, площади которых равны соответственно слагаемым левой части неравенства.



Перепишем неравенство в виде

$$\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{8}\cdot$$

Так как площадь заштрихованной ступенчатой фигуры меньше площади криволинейной трапеции, в которой она содержится, то

$$\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\int_2^n\frac{dx}{x^3}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2n^2}<\frac{1}{8}.$$

Неравенство доказано.