ЛАБИРИНТЫ ДЕСЯТИЧНОЙ

Столяр В.Г.

Московская обл, г. Люберцы

Часть 1

Однажды, в поисках интересных математических головоломок, в журнале «Наука и жизнь», 1981 № 3, с.74 я наткнулся на так называемую «Короткую задачу» (автор – Волобан Н.) со следующим условием:

Найдите число, которое оканчивается на 0 и которое при переносе первой цифры в конец числа уменьшается в 6 раз.

Напрашивалось простое решение.

Так как искомое число по условию задачи в 6 раз больше нового числа, то цифрой, которая встала после нуля, может быть только 5, так как никакая другая значащая цифра при умножении на 6 не даёт в результате число с нулём на конце. Отсюда следует такой элементарный алгоритм поиска. *Шаг 1-й*: Последнюю цифру нового числа, 5, умножаем на 6, получаем число 30, последняя цифра которого ,0, уже стоит слева перед пятёркой по условию. Число десятков, 3, запоминаем в уме; *Шаг 2-й*: Ноль умножаем на 6, 3 в уме, получаем и пишем следующую слева цифру 3; Шаг 3-й: Умножаем 3 на 6, получаем 18, 8 пишем слева от тройки, 1 в уме и т.д.

Читатель, которого, может, заинтриговала эта задача и у которого хватило терпения продолжить этот процесс умножения, обнаружил, что в этом непрерывном и утомительном процессе на 57-м шагу (8 умножаем на 6, 2 в уме, получаем 50 и пишем следующую слева от восьмёрки цифру 0 (5 в уме), и на следующем, 58-м(!) шагу (0 умножаем на 6, 5 в уме, пишем 5 слева от нуля, и на следующем, 59 шагу (5 умножаем на 6), получаем 30, и мы, оказывается, повторили 1-й шаг нашего процесса.

Искомое число перед нами:

5084745762711864406779661016949152 542372881355932203389830

Очевидно, этот процесс может продолжаться бесконечно, а полученные 58 цифр искомого числа, представляют собой как бы фрагмент бесконечной вереницы одинаковых, периодически повторяющихся 58-значных чисел. Естественно обозначить это искомое число *«периодом»* бесконечной вереницы таких чисел.

Это любопытное явление меня тогда заинтриговало, и я решил испытать подобный алгоритм с другими цифрами (то есть, приняв, к примеру, за последнюю цифру единицу, умножать её на другие цифры по тому же правилу (то есть с учётом «в уме»). Вот что у меня получилось:

Получилась, как видим, довольно разношёрстная картина. Думаю, что у многих читателей, терпеливо дочитавших до этого места, как и у меня в 80-х годах, возникло подозрение, что полученный результат, возможно, связан с периодичностью десятичных дробей. Попробуем доказать такое предположение в общем виде.

Доказательство:

Пусть А – искомое n-значное число, начинающееся слева с цифры a.

B – число, образовавшееся при переносе первой цифры a в конец числа A. Поставим условие, что новое число В меньше искомого в i раз, т.е.

$$A = i \times B. \qquad (1)$$

Таблица 1

Последняя цифра числа	Постоянный множитель	Образовавшееся число-период	Количество цифр в периоде
1	2	052631578947368421	18
1	3	0344827586206896551724137931	28
1	4	025641	6
1	5	020408163265306122448979591836734693877551	42
1	6	0 1 6 9 4 9 1 5 2 5 4 2 3 7 2 8 8 1 3 5 5 9 3 2 2 0 3 3 8 9 8 3 0 5084745762711864406779661	58
1	7	0144927536231884057971	22
1	8	0126582278481	13
1	9	01123595505617977528089887640449438202247191	44
1	10	01	2

Составим уравнение:

$$\{A - a \times 10^{(n-1)}\} \times 10 + a = B. \qquad (2)$$

Подставим выражение (1) в уравнение (2), получим уравнение:

$$\{i \times B - a \times 10^{(n-1)}\} \times 10 + a = B.$$

Преобразуем его:

$$B \times (10i - 1) = a \times (10^n - 1),$$

откуда получаем:

$$B = \{a\,(10^n - 1)\}/(10i - 1). \qquad (3)$$

Поскольку $(10^n - 1)\}$ – это число, записываемое n девятками (999…99), а выражение (10i – 1) – число, последняя цифра которого – девятка, то, как известно из арифметики, выражение $(10^n - 1)\}$ / (10i – 1) представляет собой период десятичного представления дроби 1/(10i – 1). А произведение однозначного (по условию) числа a на период указанной дроби представляет собой либо круговую перестановку этого периода (об этом и о других свойствах периодов см., например, в моей статье «Удивительные приключения периодических дробей» [1]), либо другой период дроби с тем же знаменателем, но с другим числителем; так, для знаменателя 79 мы имеем 6 различных периодов из 13 цифр при числителях 1 (0126582278481), 2 (0253164556962), 3 (0379746835443), 4 (0506329113924), 6 (0759493670886) и 12 (1518987341772).

Посмотрим внимательно на равенство (3). Очевидно, оно непосредственно относится к знаменателям с цифрой 9 на конце, а все данные таблицы 1 относятся именно к таким знаменателям. В чём же секрет алгоритма, найденного при решении «короткой задачи»?

Рассмотрим в этом аспекте дробь 1/39 = 0,(025641) , для которой период состоит из 6 цифр. Цифра 1 в конце периода заранее обусловлена тем, что при делении числа из 6 девяток 999999 на 39 частное должно оканчиваться на единицу. Преобразуем дробь 1/39 следующим образом: 1/39 = 1/(40 – 1) = (1/40) / (1-1/40).

Последнее выражение, как известно, представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом b_1 = 1/40 и знаменателем q = 1/40:

$$1/39 = 40^{-1} + 40^{-2} + 40^{-3} +$$

$$+ 40^{-4} + 40^{-5} + 40^{-6} + 40^{-7} \ldots \qquad (4)$$

А теперь представим для дроби 1/39 (здесь $i = 4$) последовательно процедуру полученного при решении «короткой задачи» алгоритма (пошаговое умножение на 4 справа налево и сложение результатов умножения) в рамках первых 6 цифр десятичного представления (периода) этой дроби 1/39 = 0,(025641):

$$1 \times 10^{-6} + 4 \times 10^{-5} + 4^2 \times 10^{-4} + 4^3 \times 10^{-3} + 4^4 \times 10^{-2} + 4^5 \times 10^{-1} + 4^6 \times 10^0, \qquad (5)$$

или для наглядности (складываем вертикально):

```
  0, 0 0 0 0 0 1
 + 0, 0 0 0 0 4
+ 0, 0 0 1 6
 + 0 , 0 6 4
+ 2, 5 6
+ 1 0 2 , 4
+ 1 0 9 6 , 0 ______
 = . . . 1, 0 2 5 6 4 1
```

Мы видим. Что для получения всех 6 цифр периода достаточно 6 шагов умножения и сложения (7 слагаемых). Попробуем вывести формулу суммы этих 7 слагаемых. Очевидно, можно представить эти слагаемые в виде членов геометрическую прогрессию с первым членом $b_1 = 10^{-6}$ и со знаменателем q = 40 (знаменатель 40 получится, если последующее слагаемое в ряду (5) разделить на предыдущее b_{n+1}/ b_n):

$$10^{-6} + 40 \times 10^{-6} + 40^2 \times 10^{-6} + 40^3 \times 10^{-6} + 40^4 \times 10^{-6} + 40^5 \times 10^{-6} + 40^6 \times 10^{-6}. \qquad (6)$$

Продолжим суммировать ряд (6), но влево от его первого члена 10^{-6}, сохраняя знаменатель прогрессии q = 40, получим ряд:

$$40^{-1} \times 10^{-6} + 40^{-2} \times 10^{-6} + 40^{-3} \times 10^{-6} + 40^{-4} \times 10^{-6} + 40^{-5} \times 10^{-6} + 40^{-6} \times 10^{-6} + 40^{-7} \times 10^{-6} + \ldots \qquad (7)$$

Если умножить ряд (7) на 10^6,то получим ряд:

$$40^{-1} + 40^{-2} + 40^{-3} + 40^{-4} + 40^{-5} + 40^{-6} + 40^{-7} \ldots . \qquad (8)$$

Очевидно, что цифры в записи сумма ряда (8), а , значит, и ряда (4), совпадают с цифрами в записи суммы ряда (6). То есть мы показали, что предложенный алгоритм получения периода десятичной дроби для знаменателей вида $(10i - 1)$ с конца (пошаговое умножение на i и сложение) является универсальным.

А как быть с другими знаменателями? Если знаменатель обыкновенной дроби оканчивается на цифру 1, или 3, или 7, то умножив её числитель и знаменатель одновременно соответственно на 9, 3, 7 (при этом знаменатель примет вид $10i - 1$), мы получим равную ей по величине дробь, к которой применим рассмотренный алгоритм. Важно отметить, что если знаменатель дроби оканчивается на чётную цифру или на цифру 5, то данный алгоритм усложняется дополнительными операциями для достижения знаменателем вида $10i-1$. Поскольку число i в данном методе является стержневым при умножении, назовём его словом *иннер (*от английского *inner* – внутренний), что отражает, на наш взгляд, его функцию сквозного невидимого множителя. Таким образом для каждого нечётного знаменателя определён свой *иннер,* позволяющий находить период десятичного представления дроби с этим знаменателем с конца, то есть заменить операцию деления на умножение (без свойственного операции деления столбиком подбора цифр частного!). Составим (для наглядности) небольшую таблицу соответствия некоторых нечётных знаменателей d и их иннеров:

Таблица 2

d	3	7	9	11	13	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	…
i	1	5	1	10	4	12	2	19	7	19	3	28	10	26	4	37	13	…

Пример: Найти частное от деления 12 на 23. Преобразуем дробь 12/23 умножением числителя и знаменателя на 3, получаем дробь 36/69, для знаменателя которой, как и для числа 23, $i = 7$ (см. Таблицу 2).

Последняя цифра делимого 36 (шестёрка) становится последней цифрой результата, но число десятков делимого (3) держим в уме Пишем 6, умножаем её на 7, получаем 42 и 3 в уме (= 45), пишем 5 слева от шестёрки, 4 в уме. Далее 5 умножаем на 7, получаем 35 + 4 = 39 , 9 пишем левее , 3 в уме и т.д. Должно получиться, как это видно из таблицы 1, 22 цифры в периоде:

15/23 = 0,(5217391304347826086956).

Здесь необходимо отметить, что рассмотренный алгоритм деления на числа вида 10i – 1 (последовательное умножение на *i)* был зафиксирован в одних из самых древних священных писаниях на санскрите – *ведах* («знание», «учение»), в которых знания излагались посредством *сутр* (лаконичное и отрывочное высказывание, афоризм). Данный способ деления был описан в одной из составных частей древних вед –*«атхарваведа»* («веда заклинаний»). В современной Индии достижения древней математической мысли в виде отдельных сутр отражены в неоднократно публиковавшейся в Дели издательством «Motilal Banarsidass» книге индийского философа и просветителя Бхарати Кришна Тиртхаджи Махараджа «Vedic Mathematics» («Ведическая математика») [2], где уже в первой главе «Практическое применение ведических сутр к конкретным математическим задачам» представлен метод деления 1 на 19 непрерывным умножением последней цифры периода 1 на число, больше числа десятков знаменателя на единицу, т.е. на 2. Результат записывается справа налево, т.е. период, состоящий из 18 цифр (см. таблицу 1), образуется при этом с конца. Причём, этот метод называется в сутрах *«на единицу больше предыдущей»*. В той же главе приведён другой метод получения периода дроби 1/19, теперь уже делением на ту же двойку, но слева направо (т.е. период образуется с его начала): Числитель 1 делится на 2, получается 0 (это первая цифра периода, но с его начала), который вместе с единицей числителя образует число 10; делим это число 10 на 2, получаем 5, которую пишем правее первого нуля. Эту пятёрку делим на 2, получаем 2 (в остатке 1). Пишем двойку правее пятёрки. Эта двойка вместе с предыдущим остатком составляет число 12, которое делим на 2, получаем 6 без остатка, делим 6 на 2, получаем 3 (без остатка) и т.д. до получения единицы (без остатка) на 18 шагу в результате деления 2 на 2 , после чего, очевидно, процесс начнёт повторяться. Читатель сможет сам убедиться, что описанный в сутрах второй метод деления 1 на 19 очень близок к известной процедуре деления числа из 18 девяток на 19, что в результате, как сказано выше, даёт число, состоящее из 17 цифр без нуля (18-я цифра) в начале периода и совпадающее с периодом дроби 1/19.

Часть 2

После знакомства с »Vedic mathematics» я стал глубже и внимательней исследовать процесс деления чисел, чтобы лучше понять анатомию получения периода десятичной дроби. Роясь в журналах и книгах, я собирал разные необычные примеры деления, которые без доказательств метода приводились в различных источниках, о чём в журнале «Математика в школе», 1989, № 5, с. 110-113, была напечатана моя статья «А фокусы ли это?» [3]. Я интуитивно подозревал, что в процессе деления кроется ещё какая-то тайна. И вот что я однажды увидел.

При делении единицы на числа вида ($10i - 1$), т.е. оканчивающиеся на девятку, неожиданно раскрылся секрет цифр периода. *Оказалось, что это последние цифры остатков при известном делении уголком.* Этот факт я не встречал ни в одном источнике, касающимся десятичных дробей и их периодов. Действительно, посмотрим внимательно на всем известный процесс деления 1 на 39:

Таблица 4

1	0	0	0	0	0	0	/	3	9					
1	0							0,	0	2	5	6	4	1
1	0	0												
	7	8												
	2	2	0											
	1	9	9											
		2	5	0										
		2	3	4										
			1	6	0									
			1	5	6									
					4	0								
					3	9								
						1								

Вполне вероятно, что древнеиндийские жрецы наблюдали эту картину так же, как мы сейчас, и именно эта картина остатков послужила им основанием для вывода описанного метода деления с помощью операции умножения (в данном примере умножение на 4, начиная с последнего остатка 1) и сложения с получением результата с конца. Кстати, уважаемый читатель, предлагается Вам в виде упражнения попробовать доказать это свойство периода в общем виде.

Моя интуиция ещё не была удовлетворена последним наблюдением. Я продолжал делить разные числа одно на другое с разными делимыми и делителями, и с каждым новым примером мне казалось, что я приближаюсь к какому-то неведомому свойству десятичных дробей. Честно скажу, что я не помню сейчас (а это было в конце 80-х), какой пример послужил неожиданной находке в этой области. Я вдруг обнаружил, что, оказывается, можно получать частное от деления одного числа на другое, независимо от вида делителя, так же с помощью операции умножения и сложения (без подбора цифр частного),при этом результат получается слева направо, как мы привыкли при обычном делении. Мой вывод тогда был почти интуитивен. Прежде, чем я расскажу об этом способе деления на примере, сообщаю, что со временем мне удалось теоретически (с прямой и обратной теоремой) доказать этот новый метод и, более того, показать, что этот новый метод, во-первых, годится для любой системы счисления, а, во-вторых, что внедрение этого нового метода деления чисел в компьютере в двоичной системе счисления на аппаратном уровне позволяет увеличить быстродействие компьютера при выполнении операции деления на 12 и более процентов по сравнению с современным аппаратным способом (см. мою статью [4]).

Новый метод звучит следующим образом:

Чтобы разделить натуральное число t на другое натуральное число k, следует делимое t умножать непрерывно на число, дополняющее делитель k до единицы с нулями, т.е. до 10^m (т.е. до10 или до 100 и т.д., записывая каждое произведение со сдвигом вправо от предыдущего результата на столько разрядов , сколько нулей в числе 10^m, до которого берётся дополнение (здесь нелишне напомнить, что основание любой системы счисления записывается в виде числа 10). На *заранее определённом шагу произведения суммируются вертикально.* Количество шагов зависит от точности, с которой требуется найти частное от деления. Была выведена формула зависимости числа шагов от заданной степени точности результата [4, с. 94]:

Для наглядности приведу следующий простой пример. Пусть требуется поделить 1 на 7. Дополнение знаменателя до числа 10 составляет число 3, дополнение до 100 – число 93 и т.д. Мы выбираем самый маленький множитель. Процесс выглядит следующим образом (см. Таблицу 5).

Таблица 5

1											
	3										
		9									
		2	7								
			8	1							
			2	4	3						
				7	2	9					
				2	1	8	7				
					6	5	6	1			
					1	9	6	8	3		
						5	9	0	4	9	
						1	7	7	1	4	7
1	4	2	8	5	7	0	6	6	9	3	7

Как видим для получения полного периода дроби 1/7 = 0,(142857) с точностью до 10^(-6) потребовалось 12 шагов.

Доклад на тему «Вместо деления – умножение» был сделан мною на Международной научно-технической когференции, посвящённой 35-летию со дня основания Московского Государственного Технического Университета Гражданской Авиации (МГТУГА) в Москве 18 мая 2006 года. В «Научном вестнике МГТУГА» № 114, 2007г., с. 90-103, была помещена моя статья «Вместо деления – умножение» [4], где мои выводы были теоретически обоснованы. Эту статью можно прочитать в интернете, набрав в адресной строке название статьи либо адрес: https://cyberleninka.ru/article/n/vmesto-deleniya-umnozhenie.

Статья была представлена доктором технических наук, профессором Самохиным Алексеем Васильевичем. Пользуюсь возможностью ещё раз выразить глубокую благодарность профессору Самохину А.В., а также профессору Рощину А.Г. за внимание к моим исследованиям в этой области, а также за понимание, поддержку, квалифицированные консультации и помощь при подготовке доклада и статьи.

В заключение предлагаю читателям вопрос на смекалку: *почему в записи десятичного периода дроби 1/7 первые две цифры образуют число в два раза меньше числа, образованного из третьей и четвёртой цифр и почти в 4 раза меньше числа, образованного последними двумя цифрами периода (14, 28 и 57)?*

Список литературы

1. «Удивительные приключения периодических дробей «Квант». 1989. № 8. С. 23-30.

2. Bharati Krshna Tirthaji Maharaja «Vedic Mathematics». Delhi. Motilal Banarsidass Publishers. 1992. p.1.

3. Соляр В.Г. А фокусы ли это? Математика в школе. 1989. № 5. С. 110-113.

4. Соляр В.Г. Вместо деления – умножение/ Научный вестник МГТУГА, № 114. Москва, 2007. С. 90-103.