

ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЯ «ПРОГРЕССИЯ» В ЖИЗНИ

Черенкова Ю.С.

г. Воронеж, МБОУ «СОШ № 16», 10 класс

Руководитель: Драйцель И.В., г. Воронеж, МБОУ «СОШ № 16», преподаватель математики высшей категории

В настоящее время актуальным вопросом становится проблема соотношения, изучаемого в школьном курсе математики, материала с жизнью. В 9 классе мы сталкиваемся с темой «Прогрессии», даем определение термину, также используем основные формулы прогрессии для решения задач. В заданиях ОГЭ используются задачи на применение основных формул прогрессий, но как эти понятия связаны с жизнью. В заданиях ЕГЭ по математике также есть задачи на применение арифметической и геометрической прогрессий, но уже с практическим содержанием.

Цель работы. Выяснить, имеют ли прогрессии практическое применение в повседневной жизни.

Объект исследования. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Предмет исследования. Практическое применение прогрессий в жизни.

Результаты анкетирования. С целью выявления наиболее правильного ответа на наш основной вопрос «Знаете ли вы как применить свойства прогрессии в повседневной жизни?», мы провели анкетирование среди учащихся 10 – го класса и членов моей семьи (см. Приложение 1).

Результаты анкетирования оказались неоднозначными. Всего было опрошено 35 человек, из них 31% ответили на вопрос положительно, а 69% не знают, как применять свойства прогрессии в жизни.

Также мы провели еще одно анкетирование и выяснили, что большая часть опрошенных (83%) хотела бы узнать о необычном применении прогрессии в жизни. В связи с этим, мы считаем, что данная тема является интересной для изучения на сегодняшний день.

Определения и формулы

Арифметическая прогрессия

– это числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для этой последовательности числом d .

Число d называется разностью прогрессии.

Любой член арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{1a_1 + d(n-1)}{2}n.$$

Геометрическая прогрессия

Это числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное для этой последовательности число q .

Число q называется знаменателем прогрессии.

Любой член геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

$$b_n = b_1 q_n - 1.$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_1(g^n - 1)}{g - 1}.$$

Зная эти формулы можно решить большое количество интересных задач: литературного, исторического и практического содержания.

Историческая справка

Первые представления об арифметической и геометрической прогрессиях были еще у древних народов. Задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности, были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деление наследства и др.

На связь между прогрессиями первым обратил внимание великий ученый Архимед (287–212 гг. до н. э). Для нахождения площадей и объемов фигур он вывел формулу суммы квадратов натуральных чисел.

Термин «прогрессия» (от латинского *progression*, что означает движение вверх) был введен римским автором Боэцием

(в VI веке) и понимался в более широком смысле, как бесконечная числовая последовательность.

Формула суммы членов арифметической прогрессии была доказана древнегреческим ученым Диофантом (в 3 веке).

Формула суммы членов геометрической прогрессии дана в книге Евклида “Начала” (3 век до н.э.).

Древняя Греция. Сведения, связанные с прогрессиями, впервые встречаются в дошедших до нас документах Древней Греции. Уже в V в. до н. э. греки знали следующие прогрессии и их суммы:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1).$$

Германия. Известна интересная история о знаменитом немецком математике К. Гауссе (1777 – 1855), который еще в детстве проявлял выдающиеся способности к математике. Учитель предложил учащимся сложить все натуральные числа от 1 до 100. Маленький Гаусс решил эту задачу за одну минуту, сообразив, что суммы 1+100, 2+99 и т.д. равны, он умножил 101 на 50, т.е. на число таких сумм. Иначе говоря, он заметил закономерность, присущую арифметическим прогрессиям.

Задача – легенда. Шахматная игра была придумана в Индии, и когда индусский царь Шерам познакомился с нею, он был восхищен её остроумием и разнообразием возможных в ней положений. Узнав, что она изобретена одним из его подданных, царь приказал его позвать, чтобы лично наградить за удачную выдумку. Изобретатель, его звали Сета, явился к трону повелителя. Это был скромно одетый ученый, получавший средства к жизни от своих учеников.

одно зерно, на вторую – в 2 раза больше, т. е. два зерна, на третью – еще в 2 раза больше, т. е. 4 зерна и так далее до 64 – ой клетки.

Царь был удивлен, когда узнал, что такую, казалось бы, скромную просьбу невозможно выполнить.

Можно подсчитать, что масса такого числа пшеничных зерен больше триллиона тонн. Это заведомо превосходит количество пшеницы, собранной человечеством до настоящего времени.

Если бы царю удалось засеять пшеницей площадь всей поверхности Земли, считая моря, и океаны, и горы, и пустыню, и Арктику с Антарктикой, и получить удовлетворительный урожай, то, пожалуй, лет за 5 он смог бы рассчитаться.

Применение прогрессий в жизни

1. Финансовая пирамида. Разберёмся в механизмах этих организаций.

Финансовая пирамида – способ обеспечения дохода участникам структуры за счет постоянного привлечения денежных средств. Доход первым участникам пирамиды выплачивается за счет вкладов последующих участников. В большинстве случаев истинный источник получения дохода скрывается, а декларируется вымышленный или малозначимый. Подобная подмена является мошенничеством.

Как правило, в финансовой пирамиде обещается высокая доходность, которую невозможно поддерживать длительное время, а погашение обязательств пирамиды перед всеми участниками является заведомо невыполнимым. Закономерным итогом такой ситуации является банкротство проекта и убытки последних инвесторов.

Человек собирается организовать финансовую пирамиду.

Представим, что число участников увеличивается в 5 раз с каждым кругом. В первом кругу участвуют 120 человек, во втором – 600, в третьем – 3 000, на четвертом – 15 000, на пятом – 75 000, на шестом – 375 000, на седьмом – 1 875 000, на восьмом – 9 375 000, на девятом – 46 875 000, на десятом – 234 375 000 человек.

Численность населения Воронежа составляет 1 039 801 человек (данные 2018 года). Следовательно, на седьмом кругу количество участников финансовой пирамиды превысит численность населения нашего города.

Численность населения России составляет 146 877 088 человек (данные 2018 года). Можно заметить, что на десятом кругу количество участников значительно превышает численность населения страны.

Решение задачи

Найти: $S_{64} = ?$

$$b_1 = 1, g = 2, n = 64$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad S_{64} = 2^{64} - 1$$

Её сумма равна **18 446 744 073 709 551 615**



Изобретатель шахмат попросил в награду за свое изобретение столько пшеничных зерен, сколько их получится, если на первую клетку шахматной доски положить

Так что участник, включившийся на седьмом или десятом круге, уже ничего не получит.

Такая закономерность чисел, также является геометрической прогрессией

2. «Сложные проценты». В жизненной практике геометрическая прогрессия появляется в первую очередь в задаче об исчислении так называемых «сложных процентов».

Каждому в жизни приходится решать задачи, связанные с денежными вкладами.

Применение понятия на практике. Воспользуемся конкретным примером. Размер материнского капитала составляет 453 000 р. Можно ли вложить такую сумму в банк под выгодный процент и к совершеннолетию ребенка приобрести ему квартиру?

Решение. Самый выгодный вклад, предлагающий нашим условиям, является вклад «Сохраниай» в Сбербанке России под 5 % годовых.

Первоначально вложено 453 000 р. через год сумма возрастет на 5 % составит 105 % от 453 000 р.

$$453\,000 \cdot 1,05 \text{ (сумма составит через год)}$$

$$453\,000; 453\,000 \cdot 1,05; 453\,000 \cdot 1,05^2; \\ 453\,000 \cdot 1,05^3; 453\,000 \cdot 1,05^4$$

Последовательность имеет вид геометрической прогрессии, где

$$b_1 = 453\,000; g = 1,05$$

$$453\,000 \cdot 1,05^{18} = 1,0902 \cdot 10^6 = 1\,090\,200 \text{ р.}$$

Вывод. Учитывая, что средняя стоимость однокомнатной квартиры в г. Воронеже составляет 1900000 р., на сумму 1090200 приобрести жилище не возможно, но подобное вложение денежных средств является достаточно выгодным.

Справка. В XIII веке в Англии ростовщики давали деньги под 50 % годовых. Это вызывало страшное недовольство. Издавались законы, ограничивающие процент. Король Генрих VII даже совсем отменил взимание процентов, что привело в упадок, как банковское дело, так и промышленность, лишившуюся возможности получения кредитов. В конце концов, взимание процентов было разрешено, но не должно было быть большим 10 %.

3. Изменение массы радиоактивного вещества со временем – еще один пример геометрической прогрессии.

Известно, что за единицу времени такое вещество теряет определенную часть своей массы (она переходит в другое вещество

и энергию). Для каждого радиоактивного вещества определяется величина T – период полураспада. Массы нераспавшегося вещества в моменты $0, T, 2T, 3T, \dots$ будут образовывать бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

4. Прирост древесины в лесном массиве происходит по законам геометрической прогрессии. При этом у каждой породы дерева свой коэффициент годового роста объема. Учет этих изменений позволяет планировать вырубку части лесных массивов и одновременную работу по восстановлению лесов.

5. Прогрессии в природе. Все организмы обладают интенсивностью размножения в геометрической прогрессии.

Бактерии. Известно, что бактерии размножаются делением: одна бактерия делится на две; каждая из этих двух в свою очередь тоже делится на две, и получаются четыре бактерии; из этих четырех в результате деления получаются восемь бактерий и т. д. (геометрическая прогрессия). Результат каждого удвоения называется поколением.

Справка. Способность к размножению у бактерий настолько велика, что если бы они не гибли от разных причин, а непрерывно размножались, то за трое суток общая масса потомства одной только бактерии могла бы составить 7500 тонн. Таким громадным количеством бактерий можно было бы заполнить около 375 железнодорожных вагонов.

Справка. Интенсивность размножения бактерий используют в пищевой промышленности (для приготовления напитков, кисломолочных продуктов, при квашении, солении и др.), в фармацевтической промышленности (для создания лекарств, вакцин), в сельском хозяйстве (для приготовления силоса, корма для животных), в коммунальном хозяйстве и природоохранных мероприятиях (для очистки сточных вод, ликвидации нефтяных пятен).

6. Прогрессии – оправдание войн. Английский экономист епископ Мальтус использовал геометрическую и арифметическую прогрессии для оправдания войн: средства потребления (пища, одежда) растут по законам арифметической прогрессии, а люди размножаются по законам геометрической прогрессии. Мальтус считал, для того, чтобы избавиться от лишнего населения, необходимы войны.

8. Наследство. Человек получил наследство. Первый месяц он истратил 100\$, а каждый следующий месяц он тратил на 50\$ больше, чем в предыдущий. Каков размер наследства, если денег хватило на год такой безбедной жизни?

Решение

Применив формулу $a_n = a_1 + d(n-1)$, получаем:



$$a_{10} = 100 + 50(10 - 1) = 550\$$$

$$a_1 = 100; \quad d = 50; \quad n = 365; \quad S_n = ?$$

Применив формулу $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

$$S_{365} = \frac{200 + 50(365 - 1)}{2} \cdot 365 = 4234000$$

9. Прогрессии в музыке. В музыке прогрессией называется постепенное повторение мотива в один или два такта в восходящем или нисходящем порядке. При таком повторении мотива выбирается интервал, на который мотив должен постоянно переставляться в восходящем или нисходящем направлении. Прогрессия бывает точная или неточная. В точной, мотив повторяется на другой ступени буквально, т. е. с сохранением не только названий всех своих интервалов, но и их точной величины. В неточной прогрессии допускаются отступления от точной величины интервалов мотива, и интервала, на которой мотив переставляется. Прогрессия в музыке называется секвенцией.

10. Прогрессии в литературе. Даже в литературе мы встречаемся с математическими понятиями. Вспомним строки из «Евгения Онегина».

...Не мог он ямба от хорея,

Как мы не бились отличить...

Ямб – это стихотворный размер с ударением на чётных слогах 2; 4; 6; 8... Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью прогрессии 2.

«Мой дядя сАмых чЕстных прАвил...»

Прогрессия: 2; 4; 6; 8...

Хорей – это стихотворный размер с ударением на нечётных слогах стиха. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию 1; 3; 5; 7... С первым членом 1 и разностью прогрессии 2.

«Я пропАл, как звЕрь в загОне»

Прогрессия: 1; 3 ;5; 7...

Заключение

Как вы могли заметить, исходя из вышеизложенного материала, что зная основные формулы геометрической и арифметической прогрессий, можно решить большое количество интересных задач литературного, исторического и практического содержания. Формулы и математические законы описывают явления в разных областях знаний, на первый взгляд далеких от математики.

На сегодняшний день, изучение происхождения и использования в жизни геометрической и арифметической прогрессий является актуальной и важной задачей для современных ученых.

Данное исследование позволило углубиться в изучение загадочного понятия «прогрессия», а также расширить кругозор знаний учащихся.

Список литературы

1. Дэвисон Р.К. Прогрессии / Р.К. Дэвисон. – М.: Мир Урании, 2016. – 328 с.
2. Рассел Д. Геометрическая прогрессия / Д. Рассел; изд-во «VSD», 2012.
3. Рассел Д. Арифметическая прогрессия / Д. Рассел; изд-во «VSD», 2012.
4. Википедия – свободная энциклопедия. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/>.
5. Вся элементарная математика. – Режим доступа: <http://www.bymath.net-math24.ru>.
6. Математический портал. – Режим доступа: <http://www.webmath.ru-astro-online.ru>.
7. Российский федеральный образовательный портал. – Режим доступа: <http://www.edu.ru/>.

Приложение 1

Анкета для учащихся 10-го класса

№ п/п	Содержание вопроса	Ответ на поставленный вопрос
1	Знаете ли Вы как применить свойства прогрессии в повседневной жизни?	
2	Интересно ли Вам узнать об этом?	