ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Веригина И.Ю.

МБОУ «Лицей №89», 9 «В» класс

Руководитель: Сучкова Л.А., МБОУ «Лицей №89», учитель математики

В математике одним из главных первоначальных понятий было и остается число. «Числа правят миром» – это изречение Пифагора, бывшее девизом школы и пифагорейцев – его учеников было и остается актуальным и сейчас, много веков спустя. Навыки работы с числами, выполнение различных вычислений без помощи современных средств вычислений ценится высоко и в наше время. Не зависеть от различных приспособлений для счета, уметь просчитать на несколько ходов вперед – это необходимое умение сегодня.

Кроме операций сложения, вычитания, умножения, деления существует операция возведения числа в степень и ей обратная – извлечение квадратного корня. С данной операцией я познакомилась в этом учебном году и меня увлекла неординарность этой операции. Так появилась заинтересованность и желание узнать, как можно вычислить квадратный корень из разных чисел, особенно тех, которые не вошли в таблицу квадратов. На экзаменах по математике не разрешены калькуляторы, а при решении текстовых задач часто требуется извлечь квадратный корень из чисел, больших тех, которые входят в таблицу квадратов двузначных чисел. Этим требованием к нам, избалованным различными гаджетами, современным учащимся обусловлена актуальность данной работы.

Цель работы: исследовать методы извлечения квадратных корней, которыми возможно воспользоваться, не имея калькулятора.

Задачи:

– изучить литературу по данному вопросу;

– рассмотреть особенности каждого найденного метода и его алгоритм;

– показать практическое применение полученных знаний и оценить степень сложности в использовании различных методов.

Объект исследования: квадратные корни из действительных чисел.

Предмет исследования: особенности методов извлечения квадратных корней без калькулятора.

Методы исследования:

– поиск методов извлечения квадратных корней из больших чисел;

– сравнение найденных способов;

– анализ полученных способов.

1. Определение квадратного корня из числа

О возникновении операции извлечения квадратного корня на примере $S=a^2$, когда $a=3$ $S=9$; $a=7$ $S=49$, а если $S=81$ то $a\cdot a=81$ $a=9$, а если $S=3$ $a\cdot a=3$ $a^2=3$ $a=\sqrt{3}$

Квадратным корнем из неотрицательного числа а называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен а. Это число обозначают $\sqrt{a}$, число а при этом называют подкоренным числом.

Если а – неотрицательное число, то

$$1)\sqrt{a} \geq 0 \qquad 2)\ (\sqrt{a})^2 = a\,.$$

Если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ не имеет корней, говорить в этом случае о квадратном корне из числа а не имеет смысла.

Таким образом, выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл лишь при $a \geq 0$.

Операцию нахождения квадратного корня из неотрицательного числа называют извлечением квадратного корня.

Числа, квадратный корень из которых извлекается и является целым числом, часто называют квадратными $1=1^2$; $4=2^2$; $16=4^2$; $81=9^2$ Эта операция является обратной по отношению к возведению в квадрат.

Во время работы над данным исследованием мною была обнаружена интересная информация. Оказывается, существует неофициальный праздник, посвященный квадратному корню.

День квадратного корня – праздник, отмечаемый девять раз в столетие: в день, когда и число, и порядковый номер месяца являются квадратными корнями из двух последних цифр года (например, 2 февраля 2004 года: 02–02–04).

Впервые этот праздник отмечался 9 сентября 1981 года (09–09–81).

Основателем праздника является школьный учитель Рон Гордон из города Редвуд Сити, Калифорния, США.

По объективным математическим причинам этот праздник может отмечаться строго девять раз в столетие: семь раз в первой половине века и дважды – во второй, всегда в одни и те же дни:

1 января xx01 года

2 февраля xx04 года

3 марта xx09 года

4 апреля хх16 года
5 мая хх25 года
6 июня хх36 года
7 июля хх49 года
8 августа хх64 года
9 сентября хх81 года

При этом интересно заметить, что промежуток (в годах) между праздниками составляет непрерывную последовательность нечетных чисел: 3,5,7,9,11,13,15,17.

Итак, извлечение корня n-ой степени из числа *a* – это нахождение числа b, n-ая степень которого равна *a*. Когда такое число b найдено, то можно утверждать, что мы извлекли корень.

2. Некоторые признаки существования квадратного корня из числа

1) Точный квадрат целого числа не может оканчиваться цифрами 2, 3, 7, 8, а также нечётным количеством нулей:

$$\sqrt{3600} = 60$$

$$\sqrt{6561} = 81$$

$$\sqrt{2704 = 52}$$

$$\sqrt{8649} = 93$$

$$\sqrt{7056} = 84$$

$$\sqrt{4225} = 65$$

2) Квадрат натурального числа либо делится на 4, либо при делении на 8 даёт остаток 1:

$$\begin{array}{r|l} -1089 & 8 \\ \underline{8} & 136 \\ -28 & \\ \underline{24} & \\ -49 & \\ \underline{48} & \\ 1 & \end{array}$$

Число 1089 выполняет это условие, но мы должны проверить его еще и на другом свойстве.

3) Квадрат натурального числа либо делится на 9, либо при делении на 3 даёт остаток 1.

1089/9=121/

Число 1089 выполняет все 3 условия, поэтому оно является квадратом числа, а именно

$$\sqrt{1089} = 33^2$$

Можно ли утверждать, что если число удовлетворяет одному или двум признакам оно является целым квадратом?

Возьмем 2 числа: 2916 и 2849

Число 2916 заканчивается цифрой 6, то есть оно может иметь точный квадрат.

Число 2849 заканчивается цифрой 9, и оно также удовлетворяет 1 признаку.

Проверим их на другом признаке:

Число 2916 поделим на 4, получим 729, оно удовлетворяет 2 признаку.

Число 2849 делиться на 4, но остатком, получим 712,25. Проверим делиться ли оно на 8 с остатком 1. Получим $356\frac{1}{8}$. Оно также удовлетворяет 2 признаку.

Проверим последний признак:

Число 2916 поделим на 9, получим 324, оно удовлетворяет 3 признаку.

Число 2849 делим на 9, получаем 316,(5). Поделим его на 3, получим 949,(6). Это число не удовлетворяет 3 признаку, поэтому из этого следует, что полный квадрат числа должен удовлетворять всем 3 признакам. Недостаточно, чтоб число удовлетворяло 1 или 2 признакам.

Числа, из которых нельзя извлечь точный квадратный корень, можно извлечь лишь приближенный корень

3. Подбор числа

Вычислим число $\sqrt{3136}$.

Первый этап. Нетрудно догадаться, что в ответе получится 50 с «хвостиком». В самом деле, 50^2=2500, а 60^2=3600, число же 3136 находится между числами 2500 и 3600.

Второй этап. Найдем «хвостик», т.е. последнюю цифру искомого числа. Пока знаем, что если корень извлекается, то в ответе может получиться 51,52,53,54,55,56,57,58 или 59. Проверить надо только два числа: 54 и 56, поскольку только они при возведении в квадрат дадут в результате четырехзначное число, оканчивающееся цифрой 6, т.е. той же цифрой, которой оканчивается число 3136.

Имеем: 54^2=2916 – это число не подходит 56^2=3136 – это то, что нужно. Значит,

$$\sqrt{3136} = 56.$$

Но этот способ затратный повремени и не всегда возможный, но самый распространенный, ведь хотя бы единожды, но им пользовался каждый.

4. Разложение на множители

Для извлечения квадратного корня можно разложить число на простые множители и извлечь квадратный корень из произведения. Возьмем число 5184 и разложим его:

5184	2
2593	2
1296	2
648	2
324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$$\sqrt{2}^{2}\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 3^2 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 = 72$$

$$\sqrt{5184} = 72$$

Но этот способ затратный по времени и не всегда полезен если забыть таблицу умножения.

5. Использование таблицы квадратов

В первом столбце таблицы квадратов записаны десятки, а в первой строке таблицы – единицы. Поэтому, чтобы посчитать квадрат числа нужно сначала посмотреть на первый столбец таблиц квадратов, а затем на первую строчку.

Пример 1. Необходимо посчитать квадрат числа 76. Для этого находим в первом столбце таблицы квадратов число 7, а в первой строке – число 6. На пересечения нужной строки и нужного столбца находим число 5776, что и является квадратом числа 76.

Пример 2: Необходимо найти по таблице квадратов квадрат числа 38. Для этого в первом столбце выбираем число 3, а в первой строке таблицы квадратов находим число 8,

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

ДЕСЯТКИ	ЕДИНИЦЫ									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

спускаемся на пересечение нужной строки и нужного столбца ответ 1444.

Пример 3: Необходимо найти корень из числа 7056. Найти корень, значит найти такое число, квадрат которого дает 7056. Ищем в таблице квадратов указанное число, смотрим на заголовок строки 8, смотрим на заголовок столбца 4. Таким образом, ответ 84

Но этот способ может быть недейственный, когда под рукой нет таблицы

6. Метод отбрасывания полного квадрата (только для четырехзначных чисел)

Сразу стоит уточнить, что этот способ применим только для извлечения квадратного корня из точного квадрата, а алгоритм нахождения зависит от величины подкоренного числа.

Извлечение корней до числа $75^2 = 5625$

Например:

$$\sqrt{3969} = \sqrt{\underline{38}00} + 169 = 38 + 25 = 63\,.$$

Число 3969 представим в виде суммы, выделив из этого числа квадрат 169, затем выделенный квадрат отбрасываем, к числу сотен первого слагаемого (38) прибавляем всегда 25. Получим ответ 63.

Извлечение корней после 75^2

Например:

$$\sqrt{7744} = \sqrt{\underline{76}00} + 144 = 76 + 12 = 88$$

Число 7744 представим в виде суммы 7600 и выделенного квадрата 144. Затем к числу сотен прибавить квадратный корень из 144, равный 12.

Получим ответ 88

$$\sqrt{7225} = \sqrt{7000} + 225 =$$
$$= 70 + \sqrt{225} = 70 + 15 = 85.$$

Число 7225 представим в виде суммы 7000 и выделенного квадрата 225. Затем к числу сотен прибавить квадратный корень из 225, равный 15.

Способ доступен если помнить квадраты чисел от 11 до 29.

7. Метод разбиения на грани

Вычислим: $\sqrt{763876}$.

Число разделяем на грани (по два разряда) от запятой: 76`38`76. В числе три грани – значит, в корне будет три разряда. Сначала старшая грань 76.

Подбираем наибольшее число от 1 до 9 такое, чтоб его квадрат был меньше, чем 76. Это число 8 (т.к. 8·8=64, а 9·9 = уже 81, то есть > 76).

Заносим 8 в ответ – это старший разряд ответа (сотни).

Вычитаем 64 из 76 – остаётся 12.

Сносим к 12–ти следующую грань – 38. Получается 1238.

Удваиваем то что в ответе – восьмёрку. Получается 16 – запишем 16 слева от 1238.

Приписываем к 16 справа коробочку для ещё одного разряда.

Подбираем наибольшее число от 1 до 9 такое, чтоб 16#·# было не больше, чем 1238. Это число 7 (т.к. 166·6=996<1238, 167·7=1169<1238, а 168·8=1344, то есть уже > 1238).

Заносим 7 в ответ – это следующий разряд ответа (десятки).

Вычитаем 167·7 из 1238 – остаётся 69.

Сносим к 69 следующую грань – 76. Получается 6976.

Удваиваем то, что в ответе – 87. Получается 174 – запишем 174 слева от 6976.

Приписываем к 174 справа коробочку для ещё одного разряда.

Подбираем наибольшее число от 1 до 9 такое, чтоб 174#·# было не больше, чем 6976. Это число 4 (т.к. 1743·3=5229, 1744·4=6976, а 1745·5=8725, то есть уже > 6976).

Заносим четвёрку в ответ – это будет разряд единиц.

Вычитаем 1744·4 из 6976 – остаётся ноль.

Способ универсальный, применим к целым и дробным числам, но угадывание цифры требует логического мышления и умения быстро вычислять столбиком.

$$\begin{array}{r|ll}
 & 76'38'76 = 874 & \\
 & 64 & \\ \cline{2-2}
16°\underline{7} & 1238 & \\
7 & 1169 & \\ \cline{1-1}
1169 & 174\underline{4} & \multicolumn{1}{|l}{6976} \\
 & 4 & \multicolumn{1}{|l}{6976} \\ \cline{2-3}
 & & \multicolumn{1}{|l}{0}
\end{array}$$

Алгоритм основан на формуле

$$(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2=100a^2+(20a+b)b.$$

Первый раз вычитаем квадрат, далее, приписывая по одной цифре к результату, к числу под корнем, тем самым, приписываем две десятичных цифры. Отсюда разбиение на пары (видно из формулы). Вычтя квадрат, Необходимо вычитать дальше числа вида $(20a+b)b$, где $2a$ – удвоенный известный на данный момент результат, приписывая к нему цифру, получаем 20а+в, умножаем на эту самую цифру, имеем (20а+b)b.

$$2ab=2\cdot 10a+b=20a+b.$$

8. Вавилонский способ

Число х древние вавилоняне представляли в виде суммы $a^2 + b$, где a^2 ближайший к числу х точный квадрат натурального числа а и пользовались формулой: $x=a^2+b$

$$\sqrt{X} = \sqrt{a^2} + b \approx a + \frac{b}{2a}$$

1) $\sqrt{27} = \sqrt{25} + 2 = 5 + \frac{2}{2\cdot 5} = 5,2$

2) $\sqrt{68} = \sqrt{64} + 4 = 8 + \frac{4}{2\cdot 8} = 8,25$

3) $\sqrt{1700} = \sqrt{1600} + 100 =$

$=40 + \frac{100}{80} = 40 + \frac{5}{4} = 41,25$

4) $\sqrt{28} = \sqrt{5^2} + 3 \approx 5 + \frac{3}{2\cdot 5} = 5,3$

9. Метод вычетов нечетного числа

Этот метод заключается в том, чтобы последовательно вычитать нечётные числа 1, 3, 5, 7 и т.д. пока не дойдете до нуля, а затем подсчитать число вычитаний. Это и будет ответ. Например: найдем корни 529 и 784**.** Возьмем число 529

529–1=528–3=525–5=520–7=513–9=
=504–11=493–13=480–15=465–17=448–19=
=429–21=408–23=385–25=360–27=
=333–29=304–31=273–33=240–35=205–37=
=168–39=129–41=88–43=45–45=0

Общее количество вычитаний = 23, поэтому $\sqrt{529} = 23^2$

784–1=783–3=780–5=775–7=768–9=759–
11=748–13=735–15=720–17=703–19=
=684–21=663–23=640–25=615–27=588–
29=559–31=528–33=495–35=460–37=
=423–39=384–41=343–43=300–45=255–
47=208–49=159–51=108–53=55–55=0.

Общее количество вычитаний = 28, поэтому $\sqrt{784}=28^2$.

Метод из-за своей медлительности иногда называют «Методом черепахи», неудобен для больших чисел.

10. Использование формул сокращённого умножения

Используя формулы квадрата суммы или квадрата разности

$$(-a - b)^2=(a + b)^2\ ;\ (b - a)^2=(a - b)^2$$

можно практически устно возводить в квадрат числа, оканчивающиеся на 1,2,8 и 9.

$$71^2=(70+1)^2=70^2+2\cdot 70\cdot 1+1^2= =4900+140+1=5041;$$

$$91^2=(90+1)^2=90^2+2\cdot 90\cdot 1+1^2= =8100+180+1=8281;$$

$$85^2=(80+5)^2=80^2+2\cdot 80\cdot 5+5^2=80(80+10)+25= =80\cdot 90+25=7200+25=7025.$$

Замечаем, что для вычисления 85^2 достаточно было умножить 8 на 9 и к полученному результату приписать справа 25. Аналогично можно поступать в других случаях. Например, 35^2=1225 (3·4=12 и к полученному числу приписали справа 25); 65^2=4225; 125^2=15625 (12·13=156 и к полученному числу приписали справа 25)

Доказательство отмеченного факта.

Пусть число а оканчивается цифрой 5, это значит, что а=10b+5, где b – число, полученное из числа а отбрасыванием последней цифры 5.

Тогда

$$a^2=(100b+5)^2=100b^2+25=100b(b + 1) +25.$$

Получили, что число b надо умножить на b+1, умножить полученное произведение на 100 и затем прибавить 25. Это равносильно тому, что к числу $b(b+1)$ справа приписать 25.

Заключение

В ходе работы исследовались методы извлечения квадратных корней, которыми возможно воспользоваться, не имея калькулятора. Для этого мною изучена различная литература и сайты Интернета по данному вопросу. Во время изучения обнаружила восемь методов извлечения квадратных корней, описанных в литературе. Рассмотрены особенности и алгоритм семи методов, а также показано практическое применение этих методов. Сравнивая степень сложности в применении каждого из методов можно сделать следующий вывод: в различных случаях применимы разные способы в зависимости от чисел и степени подготовленности извлекающего квадратный корень. Но, несомненно, владение каким-либо навыком извлечения квадратного корня из действительного числа необходимо, чтобы чувствовать себя уверенно в вычислениях на экзаменах и не зависеть от приборов для вычислений.

Список литературы

1. Мордкович А.Г. Алгебра. 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций – 19-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014.

2. Мордкович А.Г. Алгебра 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций – 9–е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2007.

3. Я познаю мир: Детская энциклопедия. Математика / А.П. Савин, В.В. Станцо, А.Ю. Котова , 1998.

4. http://www.cleverStudentS.ru/rootS/extracting_of_rootS.html.

5. http://открытыйурок.рф/статьи/517087.