ИЗОПИРАННОЕ НЕРАВЕНСТВО

Степанова Д.А.

ГБОУ СОШ ж.-д.ст. Погрузная, 11 класс

Руководитель: Степанова Г.А., ГБОУ СОШ ж.-д.ст. Погрузная, учитель математики

В одной из книг венгерского математика Ласло Фейеш Тот[1] «Расположение на плоскости, на сфере и в пространстве» [6] я увидела такую изопериметрическую задачу: «Какое из выпуклых тел, имеющих равные по величине поверхности, имеют наибольший объем?» Меня данная задача заинтересовала, и я решила проверить этот факт на стереометрических фигурах, изучаемых в школьной программе.

Начав создание этой работы, я опиралась на исследование изопериметрического неравенства $P^2 \geq 4\pi S$, которое нашла в одной из литератур. Так как я учусь в одиннадцатом классе, мне бы хотелось получить неравенство для стереометрических фигур. Такого неравенства в школьной программе не нашла, поэтому мне захотелось составить его самой. В итоге я получила $S^2 \geq 4\pi V$.

В процессе доказывания неравенства появилась проблема, которая заключалась в следующем: я не учла, что у S единицы измерения в квадрате, который при возведении во вторую степень площади превращается в четвертую степень, а единицы объема измеряются в третьей степени, т.е. в кубе.

Следовательно, мне нужно было согласовывать единицы измерения и увеличить коэффициент. В итоге, уже после моего выведения, в одной литературе я нашла изопиранное[2] неравенство: $S^3 \geq 36\pi V^2$, где S – площадь, V – объем, а π – известное иррациональное число, определяемое как отношение длины окружности к его диаметру.

Цель исследования: выяснить истинно или ложно изопиранное неравенство в трехмерном пространстве.

В соответствии с поставленной целью были определены задачи:

Определение объектов исследования (выписать из школьного курса геометрии объемные тела, соответствующие определению стереометрической фигуры, расположить их от простых к более сложным).

Изучение форм площадей и объемов объектов исследования, способов доказательства неравенств.

Доказать неравенства для каждой из рассматриваемых фигур, затем перейти к доказательству в общем виде.

Гипотеза: изопиранное неравенство верно для трехмерного пространства.

В качестве методов исследования применялись: работа с источниками информации, а также практическая работа на доказательства неравенств на конкретных примерах.

Объект исследования – изопиранное неравенство.

Предмет исследования – процесс доказательства неравенств.

Теоретическая и практическая значимость результатов данной работы – это применение данного материала на уроках математики, на внеурочной деятельности и использование приводимого мною неравенства для практического применения. Основными компонентами работы являются доступность, практическая направленность изучаемого материала.

1. Теоретические сведения о геометрических фигурах в пространстве

1.1. Многогранники

Для лучшего понимания напомним некоторые сведения о многогранниках и дадим каждому многограннику наглядное описание.

Куб представляет собой многогранник, у которого шесть граней, и все они – равные квадраты. У куба 12 равных ребер и 8 вершин (см. приложение 1).

$$V = a^3;$$

$$S = 6a^2.$$

Параллелепипед представляет собой многогранник, у которого шесть граней, и каждая из них – параллелограмм. Параллелепипед может быть прямым (см. приложение) или наклонным (см. приложение 2).

$$S = S_б + 2S_о;$$

$$V = S_о h.$$

[1]Ласло Фейеш Тот (Сегеда, 12 марта 1915 — Будапешт, 17 марта 2005) — венгерский математик. Наряду с Коксетером и Эрдёшем, Фейеш Тот считается родоначальником комбинаторной геометрии.

[2]Изопиранное неравенство – это общий термин для обозначения неравенства между объемом и площадью плоской поверхности.

Пирамида представляет собой многогранник, одна грань которого, называемая основанием пирамиды, – некоторый выпуклый n-угольник, а остальные n граней – треугольники с общей вершиной (см. приложение 3). Эта общая вершина называется вершиной пирамиды, а треугольники – боковыми гранями пирамиды.

$$S = S_{б} + 2S_{о};$$

$$V = \frac{1}{3}Sh.$$

Призма представляет собой многогранник, две грани которого, называемые основаниями призмы, – равные n-угольники, а все остальные n граней – параллелограммы. Они называются боковыми гранями призмы. Призма может быть прямой (см. приложение 4) или наклонной (см. приложение 5). У прямой призмы все боковые грани – прямоугольники, у наклонной призмы хотя бы одна грань – параллелограмм, не являющийся прямоугольником.

$$S = S_{б} + 2S_{о};$$

$$V = S_{осн}h.$$

1.2. Тела вращения

Цилиндр – геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими её (см. приложение 6).

$$S = 2\pi R(h+R)$$

$$V = \pi r^2 hV.$$

Конус – тело в евклидовом пространстве, полученное объединением всех лучей, исходящих из одной точки (вершины конуса) и проходящих через плоскую поверхность. Иногда конусом называют часть такого тела, имеющую ограниченный объём и полученную объединением всех отрезков, соединяющих вершину и точки плоской поверхности (последнюю в таком случае называют основанием конуса, а конус называют опирающимся на данное основание) (см. приложение 7).

$$S = \pi R(l+R)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Шаром называется множество всех точек пространства, расстояние от каждой из которых до данной точки – центра шара – не превосходит данного положительного числа, которое называется радиусом шара (см. приложение 8).

$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \pi R^3$$

Сферой называется множество всех точек пространства, удаленных от данной точки, называемой центром сферы, на одно и то же расстояние (см. приложение). Отрезок, соединяющий любую точку сферы с ее центром, называется радиусом сферы. Радиусом сферы называют также расстояние от любой точки сферы до ее центра. Для сферы, как и для окружности, определяются хорды и диаметр (см. приложение 9).

1.3. Неравенство Коши в Евклидовом пространстве[3]

Огюстен Луи Коши (1789–1857) – французский математик, основоположник теории аналитических функций.

Среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического – это неравенство называется неравенством Коши: если

$$x \ge 0, y \ge 0, \text{ то } \frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}.$$

Неравенство Коши часто используют при доказательстве других неравенств. А само оно доказывается так:

составим разность $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}$.

Имеем:

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}.$$

Неравенство $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \ge 0$ верно при любых неотрицательных значениях x и y. Значит,

$$\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy},$$

причем равенство имеет место лишь в случае $x = y$.

Из неравенства Коши, в частности, следует неравенство $x + \frac{1}{x} \ge 2$, справедливое для всех $x > 0$.

[3] Евкли́дово простра́нство (также эвкли́дово простра́нство) — в изначальном смысле, пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии. В этом случае предполагается, что пространство имеет размерность, равную 3.

В более общем виде: для неотрицательных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ справедливо неравенство между их средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

причем равенство возможно лишь при условии $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Вывод. Все стереометрические тела, рассматриваемые в школьном курсе геометрии, имеют свои свойства и формулы, с помощью которых можно вычислить площадь поверхности и их объем.

2. Изопиранное неравенство

Рассмотрим доказательство изопиранного неравенства

$$S^3 \geq 36\pi V^2$$

на конкретных фигурах, затем перейдем к доказательству в общем виде.

2.1. Изопиранное неравенство для многогранников

1. Доказательство неравенства для куба

$$S^3 \geq 36\pi V^2$$

$$S = 6a^2$$

$$V = a^3$$

Подставим данные формулы в неравенство, получим:

$$216a^6 \geq 36\pi a^6$$

Разделим обе части неравенства на $36a^2$ получим: (верно)

$$6 \geq \pi.$$

2. Доказательство неравенства для прямоугольного параллелепипеда

$$S^3 \geq 36\pi V^2$$

$$S = 2(ab + ac + bc)$$

$$V = abc$$

Заменим π на 4 (Если неравенство будет выполняться при 4, то оно будет выполняться и при π):

$$\left[2(ab + ac + bc)\right]^3 \geq 36 \cdot 4a^2b^2c^2$$

$$8(ab + bc + ac)^3 \geq 144a^2b^2c^2.$$

Разделим обе части неравенства на 8, получим:

$$(ab + bc + ac)^3 \geq 18a^2b^2c^2.$$

Извлечем корень 3 степени:

$$ab + bc + ac \geq \sqrt[3]{18a^2b^2c^2} \qquad (1)$$

Докажем это неравенство с помощью неравенства Коши (среднее арифметическое не меньше среднего геометрического):

$$\frac{ab + bc + ac}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

умножим на 3:

$$ab + bc + ac \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

и внесем 3 под корень:

$$ab + bc + ac \geq \sqrt[3]{27a^2b^2c^2}. \qquad (2)$$

Мне нужно доказать, что

$$ab + bc + ac \geq \sqrt[3]{18a^2b^2c^2}.$$

Так как в (1) и (2) неравенствах левые части одинаковые, следовательно, надо доказать, что:

$$27a^2b^2c^2 \geq 18a^2b^2c^2.$$

Разделим на $a^2b^2c^2$, получим:

27≥18 (верно)

3. Доказательство неравенства для треугольной правильной призмы

$$S^3 \geq 36\pi V^2$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h$$

Сразу заменим π на 4:

$$\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah\right)^3 \geq 27a^4h^2$$

Извлечем корень:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah \geq \sqrt[3]{27a^4h^2} \qquad (3)$$

Воспользуемся неравенством Коши, предварительно разбив: $3ah = 2ah + ah$

$$\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 2ah + ah}{3} \geq \sqrt[3]{\sqrt{3}a^4h^2}.$$

Умножим на 3 и сразу внесем тройку под знак корня:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+2ah+ah \geq \sqrt[3]{27\sqrt{3}\cdot a^4h^2} \quad (4)$$

Левые части неравенств (3) и (4) равны, следовательно, можно сравнить правые части этих неравенств:

$$27\sqrt{3}a^4h^2 \geq 27a^4h^2.$$

Разделим обе части на $27a^4h^2$, получим

$\sqrt{3} \geq 1$ (верно).

4. Доказательство неравенства для правильной треугольной пирамиды

$$S^3 \geq 36\pi V^2$$

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{2}al, \qquad V=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}h.$$

Заменим π на 4:

$$\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{2}al\right)^3 \geq 3a^4h^2.$$

Заменим

$$h^2=l^2-\frac{a^2}{12}$$

(по теореме Пифагора) и извлечем корень:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{2}al \geq \sqrt[3]{3a^4l^2-\frac{a^6}{4}}. \quad (9)$$

Воспользуемся неравенством Коши как делали ранее, разбив

$$\frac{3}{2}al=\frac{1}{2}al+al:$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}al+al=\sqrt[3]{\frac{27\sqrt{3}}{8}a^4l^2} \quad (10)$$

Сравним правые части неравенств (9) и (10):

$$\frac{27\sqrt{3}}{8}a^4l^2 \geq 3a^4l^2-\frac{a^6}{4}$$

Занесем $3a^4l^2$ в левую часть, получим:

$$\frac{27\sqrt{3}}{8}a^4l^2-3a^4l^2 \geq -\frac{a^6}{4}$$

$$a^4l^2\left(\frac{27\sqrt{3}}{8}-3\right) \geq -\frac{a^6}{4}$$

Полученное неравенство верно т.к. в левой части положительное число, а в правой – отрицательное.

Доказательство неравенства для правильной четырехугольной пирамиды

$$S^3 \geq 36\pi V^2$$

$$S=a^2+2al, \quad V=\frac{1}{3}a^2h.$$

Заменим π на 4:

$$(a^2+2al)^3 \geq 16a^4h^2.$$

Заменим $h^2=l^2-\frac{a^2}{4}$ (теорема Пифагора) и извлечем корень:

$$a^2+2al \geq \sqrt[3]{\left(16a^4l^2-4a^6\right)} \quad (11)$$

Воспользуемся теоремой Коши, разбив

$$2al=al+al:$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}al+al=\sqrt[3]{\frac{27\sqrt{3}}{8}a^4l^2}$$

Умножим обе части неравенства на 3 и внесем тройку под знак корня в правой части неравенства:

$$a^2+al+al \geq \sqrt[3]{27a^4l^2} \quad (12)$$

Сравним подкоренные выражения в правых частях полученных неравенств (11) и (12):

$$27a^4l^2 \geq 16a^4l^2-4a^6$$

$11a^4l^2 \geq -4a^6$ (верно)

2.2. Изопиранное неравенство для тел вращения

1. Доказательство неравенства для цилиндра

$$S^3 \geq 36\pi V^2$$

$$S=2\pi R^2+2\pi Rh, \; V=\pi R^2h.$$

Сразу заменим π на 4 в правой части неравенства:

$$(2\pi R^2+2\pi Rh)^3 \geq 144(\pi R^2h)^2$$

Извлечем корень из каждой части неравенства, получим:

$$2\pi R^2+2\pi Rh \geq \sqrt[3]{144\pi^2R^4h^2} \quad (5)$$

Воспользуемся неравенством Коши, предварительно разбив

$$2\pi Rh = \pi Rh + \pi Rh$$

и выполнив манипуляции с тройкой, какие мы делали ранее:

$$2\pi R^2 + \pi Rh + \pi Rh \geq \sqrt[3]{54\pi^3 R^4 h^2} \qquad (6)$$

А далее сравним правые части неравенств, как делали ранее:

$$54\pi^3 R^4 h^2 \geq 144\pi^2 R^4 h^2 \ ,$$

разделим обе части на $2\pi^2 R^4 h^2$:

$$27\pi \geq 72\text{, (верно)}$$

2. Доказательство неравенства для конуса

$$S^3 \geq 36\pi V^2$$

$$S = \pi R^2 + \pi Rl, \qquad V = \frac{1}{3}\ \pi R^2 h\ .$$

Заменим π на 4 в правой части неравенства:

$$(\pi R^2 + \pi Rl)^3 \geq 144(\frac{1}{3}\pi R^2 h)^2\ ,$$

$$(\pi R^2 + \pi Rl)^3 \geq 16\text{Q}\ \pi^2 R^4 h^2\ .$$

Заменим $h^2 = l^2 - R^2$ (по теореме Пифагора), раскроем после подстановки скобки и извлечем корень:

$$\pi R^2 + \pi Rl \geq \sqrt[3]{16\pi^2 R^4 l^2 - 16\pi^2 R^6} \qquad (7)$$

Воспользуемся неравенством Коши как в предыдущих случаях, разбив

$$\pi Rl = \frac{1}{2}\pi Rl + \frac{1}{2}\pi Rl:$$

$$\frac{1}{2}\pi Rl + \frac{1}{2}\pi Rl + \pi R^2 \geq \sqrt[3]{\frac{27}{4}\pi^3 R^4 l^2} \qquad (8)$$

Сравним правые части неравенств (7) и (8):

$$\frac{27}{4}\pi^3 R^4 l^2 \geq 16\ \pi^2 R^4 l^2 - 16\pi^2 R^6\ ,$$

перенесем $16\pi^2 R^4 l^2$ в левую часть и вынесем $\pi^2 R^4 l^2$ за скобки:

$$\pi^2 R^4 l^2 \left(\frac{27}{4}\pi - 16\right) \geq -16\pi^2 R^6$$

неравенство верно, т.к. в левой его части положительное число, а в правой части – отрицательное.

3. Доказательство неравенства для шара (сферы)

$$S^3 \geq 36\pi V^2$$

$$S = 4\pi R^2, \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$64\pi^3 R^6 \geq 64\pi^3 R^6 \text{ (верно).}$$

2.3. Доказательство неравенства в общем виде

Докажем это утверждение методом от противного. Предположим, что найдется хотя бы одна стереометрическая фигура, для которой не выполняется наше неравенство, а выполняется противоположное: $S^3 < 36\pi V^2$, отсюда $V > \frac{S^3}{36\pi}$, это означает, что объем может принять в качестве наименьшего значения $V = \frac{S^3}{36\pi}$, а мы знаем, что это есть наибольшее значение площади, соответствующее единственной фигуре – шару.

Действительно, как мы видели, для шара:

$$64\pi^3 R^6 \geq 64\pi^3 R^6.$$

Получили противоречие:

V не может быть больше, чем $\frac{S^3}{36\pi}$, значит, $S^3 \geq 36\pi V^2$ всегда.

2.4. Применение изопиранного неравенства к стереометрическим фигурам

Задача 1. Докажите неравенство для прямого параллелепипеда, в основании которого ромб.

$$S^3 \geq 36\pi V^2$$

$$S = 2a^2 \sin\alpha + 4ah, \qquad V = a^2\ \sin\alpha h$$

Опять же сразу заменим π на 4:

$$(2a^2 \sin\alpha + 4ah)^3 \geq 144a^4 \sin^2\alpha h^2\ ,$$

извлечем корень:

$$a^2 \sin\alpha + 2ah \geq \sqrt[3]{18a^4 \cdot \sin^2\alpha h^2}$$

Воспользуемся неравенством Коши, предварительно разбив

$$2ah = ah + ah:$$

$$\frac{a^2\sin\alpha + ah + ah}{3} \geq \sqrt[3]{a^4\sin\alpha h^2},$$

умножим на 3, занесем 3 под знак корня и сравним правую часть из неравенства Коши и неравенства, доказуемого мною:

$$27a^4h^2\sin\alpha \geq 16a^4\cdot\sin\alpha h^2,$$

разделим на $9a^4\sin\alpha h^2$:

$$3 \geq 2\sin\alpha,$$

т.к. наибольшее возможное значение $\sin\alpha = 1$, получившееся неравенство верно.

Задача 2. Докажите неравенство для прямого параллелепипеда, в основании которого параллелограмм.

$$S^3 \geq 36\pi V^2$$

$$S = 2ab\sin\alpha + 2ah + 2bh, \quad V = abh\sin\alpha,$$

Заменим π на 4:

$$(2ab\sin\alpha + 2ah + 2bh)^3 \geq 144a^2b^2h^2\sin^2\alpha,$$

Разделим обе части на 8, извлечем корень:

$$ab\sin\alpha + ah + bh \geq 18a^2b^2h^2\sin^2\alpha,$$

Воспользуемся неравенством Коши:

$$\frac{ab\sin\alpha + ah + bh}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2h^2\sin\alpha},$$

опять же умножим на 3, внесем ее под корень, сравним правые части неравенств:

$$27a^2b^2h^2\sin\alpha \geq 18a^2b^2h^2\sin^2\alpha.$$

Разделим на $a^2b^2h^2\sin\alpha$: $27 \geq 18\sin\alpha$, т.к. наибольшее возможное значение $\sin\alpha = 1$, полученное неравенство верно.

Задача 3. Докажите изопиранное неравенство для прямоугольной равнобедренной пирамиды, высота которой совпадает с боковым ребром.

$$S^3 \geq 36\pi V^2$$

$$S = a^2\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2,$$

$V = a^3$, заменим π на 4:

$$a^6(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})^3 \geq 4a^6,$$

сократим на a^6:

$$(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})^3 \geq 4 \text{ (верно).}$$

Задача 4. Докажите изопиранное неравенство для прямоугольной равнобедренной пирамиды, высота которой падает в центр описанной около основания окружности.

$$S^3 \geq 36\pi V^2,$$

$$S = \frac{a^2}{2} + ab\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}ab\sin\alpha, \quad V = \frac{a^4}{6}H,$$

заменим π на 4:

$$(\frac{a^2}{2} + ab\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}ab\sin\alpha)^3 \geq 4a^4H^2,$$

Извлечем корень:

$$\frac{a^2}{2} + ab\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}ab\sin\alpha \geq \sqrt[3]{4a^4H^2}$$

Воспользуемся неравенством Коши, сразу умножив обе части неравенства на 3:

$$\frac{a^2}{2} + ab\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}ab\sin\alpha \geq 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}a^4b^2\sin^2\alpha}{4}},$$

т.к. левые части у нас одинаковые, можно сравнить правые:

$$\frac{27\sqrt{2}\cdot a^4b^2 sin^2\alpha}{4} \geq 4a^4H^2$$

Заменим

$$H^2 = b^2 - \frac{1}{2}a^2$$

(Прямоугольный треугольник и радиус описанной окружности),

$$\frac{27\sqrt{2}\cdot a^4b^2\sin^2\alpha}{4} \geq 4\grave{a}^4b^2 - 2a^6$$

перенесем $4a^4b^2$ влево, получим:

$$\frac{a^4b^2(27\sqrt{2}\cdot\sin^2\alpha)}{4} \geq -2a^6 \text{ (верно).}$$

Задача 5. Докажите изопиранное неравенство для прямоугольной равнобедренной пирамиды, высота которой падает в центр вписанной окружности.

$$S^3 \geq 36\pi V^2$$

$$S = \frac{a^2}{2} + ha + \frac{\sqrt{2}}{2}ha, \quad V = \frac{a^2}{6}H,$$

сразу заменим π на 4:

$$\left(\frac{a^2}{2}+ha+\frac{\sqrt{2}}{2}ha\right)^3 \ge 4a^4H^2 .$$

Извлечем корень:

$$\frac{a^2}{2}+ha+\frac{\sqrt{2}}{2}ha \ge \sqrt[3]{4a^4H^2}$$

Воспользуемся неравенством Коши:

$$\frac{\frac{a^2}{2}+ha+\frac{\sqrt{2}}{2}\ ha}{4} \ge \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}a^4h^2}{4}}$$

Умножим обе части на 3 и внесем в правой части 3 под корень:

$$\frac{a^2}{2}+ha+\frac{\sqrt{2}}{2}\ ha \ge \sqrt[3]{\frac{27\cdot\sqrt{2}\cdot a^4h^2}{4}}$$

Сравним правые части как делали ранее:

$$\frac{27\cdot\sqrt{2}a^4h^2}{4} \ge 4a^4H^2$$

Заменим

$$H^2 = h^2 - \frac{a^2}{6+4\sqrt{2}}$$

и умножим обе части на 4:

$$27\sqrt{2}a^4h^2 \ge 16a^4h^2 - \frac{a^2}{6+4\sqrt{2}}$$

$$a^4h^2\left(27\sqrt{2}-16\right) \ge -\frac{a^2}{6+4\sqrt{2}} ,$$

(верно, т.к. слева положительное число, а справа – отрицательное).

Вывод: таким образом, изопиранное неравенство верно для всех стереометрических фигур. Суть изопиранного неравенства: если дан ряд стереометрических тел с одинаковой площадью, наибольший объем будет иметь шар. И наоборот: если дан ряд стереометрических тел с одинаковым объемом, наименьшую площадь будет иметь шар (сфера).

Заключение

В процессе исследовательской работы были решены поставленные задачи и получены следующие результаты и выводы:

Доказала справедливость неравенства для стереометрических фигур изучаемых в школьной программе. $S^3 \ge 36\pi V^2$

2. Доказала справедливость данного соотношения в общем виде, а также доказала факт превращения этого неравенства в истинное равенство для сферы или шара.

3. Провела статистическую обработку данных на применение известных теорем для доказательства изопиранного неравенства для стереометрических фигур (см. приложение 10).

В процессе проведенного исследования гипотеза, о том, что изопиранное неравенство верно для трехмерного пространства, подтверждена.

Список литературы

1. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. – М.: Изд-ательство «Мир», 1965. – С. 165.

2. Гашков С.Б. Геометрические неравенства. Путеводитель в задачах и теоремах. – М.: Изд-во «Книжный дом «Либроком»», 2013. – 258 с.

3. Крыжановский Д.А., Изопериметры. Максимальные и минимальные свойства геометрических фигур. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 116 с.

4. Люстерник Л.А. Выпуклые фигуры и многогранники. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 212 с.

5. Сивашинский И. Х. Неравенства в задачах. – М.: Наука. – С. 303.

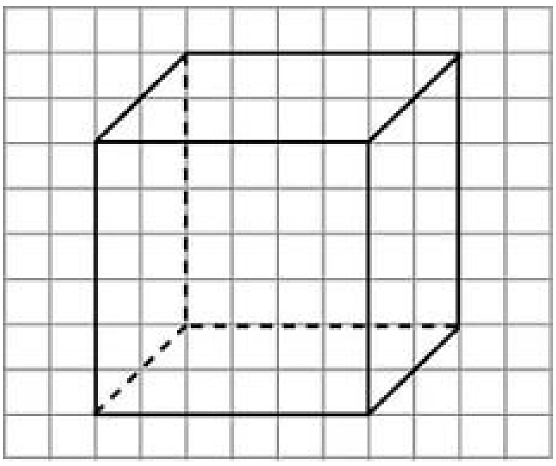
6. Тот Л.Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. – С. 363.

7. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D0%B8%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%BE_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE.

Приложения

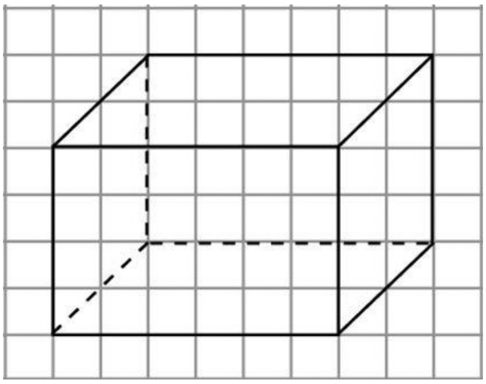
Приложение 1

Куб



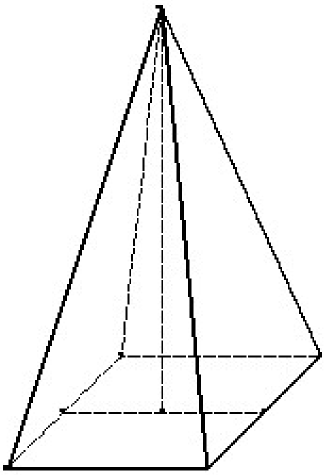
Приложение 2

Параллелепипед



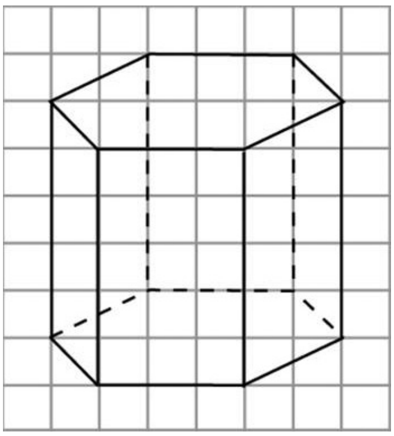
Приложение 3

Пирамида



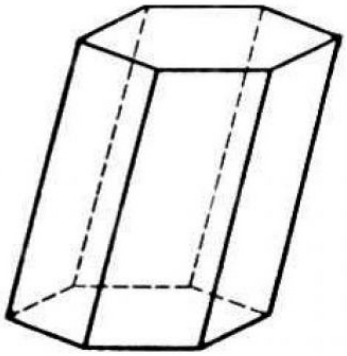
Приложение 4

Призма



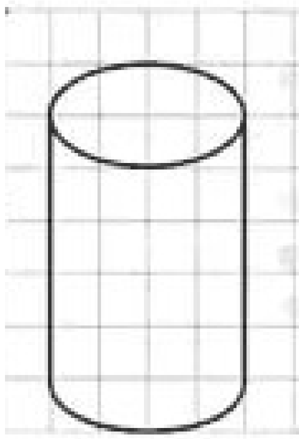
Приложение 5

Наклонная призма



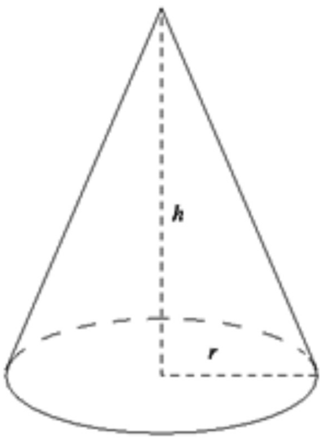
Приложение 6

Цилиндр



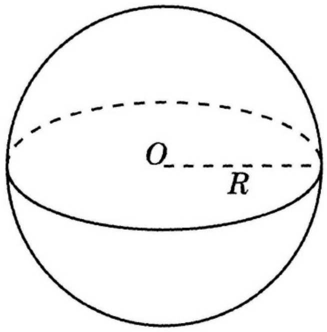
Приложение 7

Конус



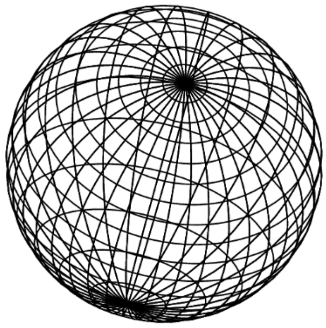
Приложение 8

Шар



Приложение 9

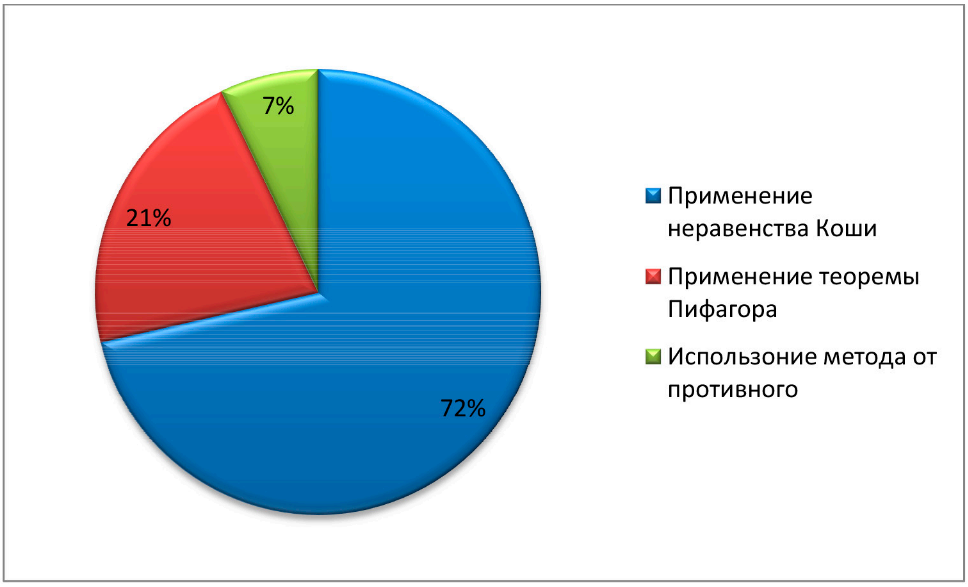
Сфера



Приложение 10

Применение известных теорем для доказательства неравенств стереометрических фигур

Применение неравенства Коши	Применение теоремы Пифагора	Использование метода от противного
10	3	1



Применение известных теорем для доказательства неравенств стереометрических фигур