ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО В РЕАЛЬНОСТИ

Мухаметова К., Чурносов М.

г. Сурск, МБОУ «СОШ», 10 класс

Руководитель: Трунова Н.В., г. Сурск, МБОУ «СОШ», учитель математики

В настоящее время геометрия широко применяется в самых разных областях: физике, химии, биологии и т.д. Неоценимо ее значение в прикладных науках: машиностроении, геодезии, картографии. Геометрия – часть нашей жизни. Но так было не всегда. Становлении геометрии как математической науки произошло позднее и связано с именами греческих ученых Фалеса (625 – 547 гг. до н.э.), Пифагора (580 – 500 гг. до н.э.), Демокрита (460 – 370 гг. до н.э.), Евклида (III век до н.э.) и др.

В знаменитом сочинении Евклида «Начала» был развит аксиоматический подход к построению геометрии, который состоит в том, что сначала формулируются основные положения (аксиомы), а затем на их основе посредством рассуждений доказываются другие утверждения (теоремы). Сегодня мы используем большинство этих аксиом при решении задач. Много вопросов было по поводу пятого постулата, формулировку которого обычно заменяют аксиомой параллельных прямых: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Много веков усилия большого числа ученых были направлены на доказательство данного утверждения, у некоторых математиков возникала мысль о невозможности доказательства пятого постулата. Решение этого вопроса было найдено великим русским математиком Николаем Ивановичем Лобачевским (1792—1856). Более того, он сделал замечательный вывод: можно построить другую геометрию, отличную от геометрии Евклида. И такая геометрия была построена – геометрия Лобачевского. Но возникает вопрос: после открытия геометрии Лобачевского применяется ли она в современной жизни? Ведь мало кто слышал о его геометрии, а если и слышал, то не знает истинного ее применения.

Объект исследования – геометрия Лобачевского.

Предмет исследования – применение геометрии Лобачевского в окружающем мире.

Цель исследования: изучить возможности применения геометрии Лобачевского в жизни.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

– изучить и проанализировать учебную литературу, связанную с жизнью Лобачевского;

– ознакомиться с особенностями его теории;

– рассмотреть применение неевклидовой геометрии в современной жизни.

Была выдвинута гипотеза: применение геометрии Лобачевского не ограничивается математикой, она используется в других науках, в окружающем нас мире.

Мы использовали методы эмпирического уровня (наблюдение, опрос, фотографирование) и теоретического уровня (изучение, обобщение, анализ, абстрагирование).

Основная часть

1. Создание неевклидовой геометрии

Безуспешные поиски доказательства 5-го постулата сыграли ту положительную роль, что помогли глубже проникнуть в структуру геометрии, уяснить взаимную связь её важнейших предложений. Эти попытки подготовили почву для возникновения у передовых учёных предположения, что 5–ый постулат недоказуем при помощи остальных аксиом геометрии Евклида.

К открытию новой, так называемой «неевклидовой», геометрии пришли три человека:

1) профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский (1792–1856);

2) великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777–1855);

3) венгерский офицер Янош Бояи (1802–1860).

Однако вклад в создание новой геометрии, сделанный этими учёными, весьма неравноценен.

Что касается Гаусса, то он совершенно не оставил никаких следов систематического изложения своих открытий в области неевклидовой геометрии и при жизни не опубликовал ни одной строчки по этому вопросу. Гаусс слишком боялся уронить свой огромный авторитет в глазах учёного мира.

Янош Бояи пришёл к открытию неевклидовой геометрии в 1823 г., будучи в возрасте 21 года, но опубликовал свои результаты в 1832 г. (позже Лобачевского) в виде приложения к учебнику математики «Опыт введения учащегося юношества в начала чистой математики», изданному его отцом Ф. Бояи. Но, непонятый своими современниками, встретивший сдержанное, нечуткое отношение со стороны Гаусса, он впал в глубокое отчаяние. Больше ни одного произведения по новой геометрии Я. Бояи не опубликовал. Остаток жизни он трагически провёл в нужде, неизвестности и полном одиночестве, пережив и Гаусса, и Лобачевского.

Однако всё сделанное в области геометрии Гауссом и Я. Бояи представляет собой лишь первые шаги по сравнению с глубокими и далеко идущими исследованиями Лобачевского, который всю жизнь упорно и настойчиво разрабатывал с разных точек зрения своё учение, довёл его до высокой степени совершенства и опубликовал целый ряд крупных сочинений по новой геометрии. Поэтому как с формальной стороны (первое по времени опубликование открытия в 1826 г.), так и по существу первое место среди лиц, разделяющих славу создания неевклидовой геометрии, следует безраздельно отвести Н. И. Лобачевскому, имя которого и носит созданная им геометрия.

Геометрия Лобачевского так и не была понята и оценена при жизни самого учёного. Но уже через десятилетие после смерти Лобачевского его открытие привлекло всеобщее внимание математических кругов и послужило могучим стимулом к коренному пересмотру взглядов на основания геометрии.

Это объясняется тем, что к этому времени самим развитием математики была подготовлена почва к правильному восприятию и пониманию идей Лобачевского и к их дальнейшему углублению и развитию.

Геометрия Лобачевского имеет обширные применения как в математике, так и в физике. Историческое её значение состоит в том, что её построением Лобачевский показал возможность геометрии, отличной от евклидовой, что знаменовало новую эпоху в развитии геометрии и математики вообще.

2. Особенности геометрии Лобачевского

В геометрии Лобачевского вместо пятого постулата Евклида принимается следующая аксиома: через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие ее.

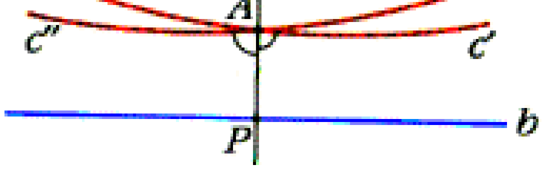


Рис. 1

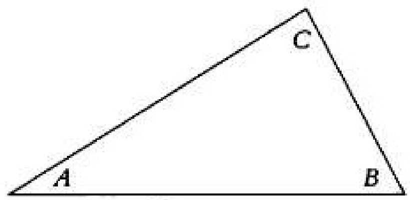
Через точку A, не лежащую на данной прямой b, проходит бесконечно много прямых, не пересекающих b и находящихся с ней в одной плоскости; среди них есть две крайние $\boldsymbol{c'}$, $\boldsymbol{c''}$, которые и называются параллельными прямой b.

Рассмотрим некоторые факты, отличающие данную геометрию от евклидовой.

В геометрии Лобачевского прямые на плоскости либо пересекаются, либо параллельны, либо являются расходящимися.

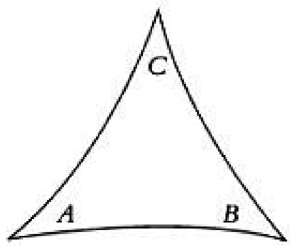
В геометрии Лобачевского сохраняются все теоремы, которые можно доказать без использования аксиомы параллельности.

Теорема о сумме углов треугольника: сумма углов любого треугольника меньше 180°. При ее доказательстве используется аксиома параллельности.



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

Рис. 2. Геометрия Евклида



$$\angle A + \angle B + \angle C < 180°$$

Рис. 3. Геометрия Лобачевского

Разность между 180° и суммой углов треугольника в геометрии Лобачевского называется дефектом этого треугольника. Площадь треугольника равна $S = k \cdot D$, где S – площадь, D – дефект треугольника, число k зависит от выбора единиц измерения площадей и углов и не зависит от выбранного треугольника. Площади треугольников в геометрии Лобачевского ограничены некоторой константой.

Согласно геометрии Евклида, если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны. В геометрии Лобачевского нет подобных треугольников, но есть четвертый признак равенства треугольников: если углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника, то эти треугольники равны.

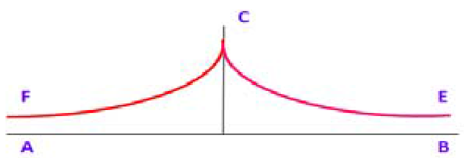
Линия равных расстояний от прямой не есть прямая, а особая кривая, называемая эквидистантой, или гиперциклом, т. е. геометрическое место точек, удалённых от данной прямой на данное расстояние (в Евклидовой геометрии эквидистанта прямой есть прямая)

Предел окружностей бесконечно увеличивающегося радиуса не есть прямая, а особая кривая, называемая предельной окружностью, или орициклом.

Предел сфер бесконечно увеличивающегося радиуса не есть плоскость, а особая поверхность – предельная сфера, или орисфера; замечательно, что на ней имеет место евклидова геометрия. Это служило Лобачевскому основой для вывода формул тригонометрии.

Длина окружности не пропорциональна радиусу, а растет быстрее.

Модели геометрии Лобачевского дали доказательство её непротиворечивости.



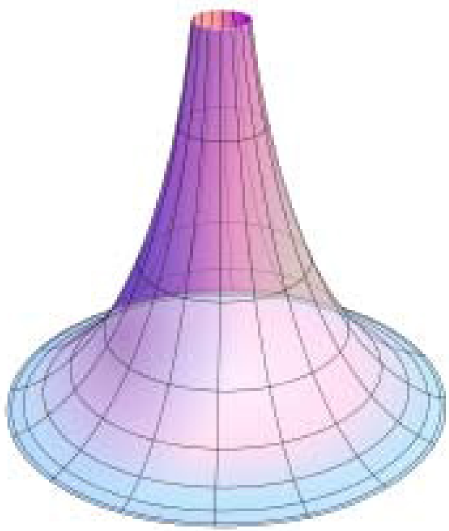


Рис. 4. Псевдосфера

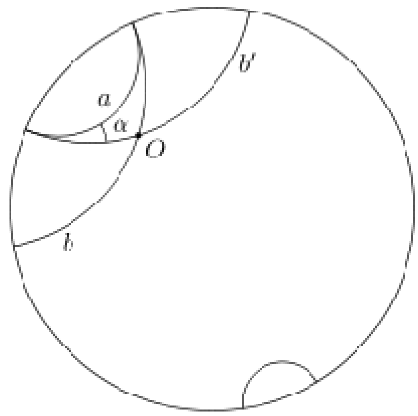


Рис. 5. Модель Пуанкаре

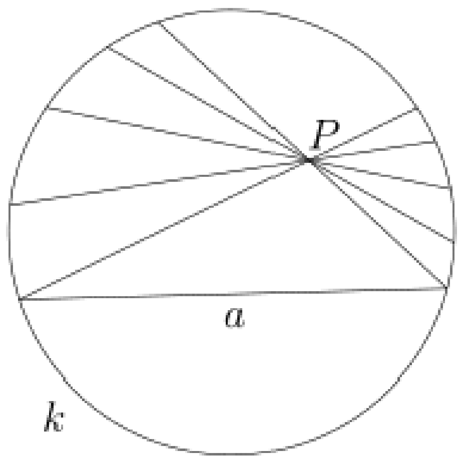


Рис. 6. Модель Клейна

Псевдосфера

Итальянский математик Э. Бельтрами в 1868 году заметил, что геометрия на куске плоскости Лобачевского сходна с геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны (псевдосфере). …Если точкам и прямым на конечном куске плоскости Лобачевского сопоставлять точки и кратчайшие линии (геодезические) на псевдосфере и движению в плоскости Лобачевского сопоставлять перемещение фигуры по псевдосфере с изгибанием, то есть деформацией, сохраняющей длины, то всякой теореме геометрии Лобачевского будет отвечать факт, имеющий место на псевдосфере. При этом длины, углы, площади понимаются в смысле естественного измерения их на псевдосфере. Но эта модель является интерпретацией геометрии, неспособной отобразить всю плоскость Лобачевского.

Псевдосфера образуется вращением линии *FCE*, называемой трактриссой, вокруг её оси *AB*.

В модели Пуанкаре в круге за плоскость Лобачевского принимается внутренность круга в евклидовом пространстве; граница данного круга (окружность) называется «абсолютом». Роль геодезических прямых выполняют содержащиеся в этом круге дуги окружностей (a,b,b’), перпендикулярных абсолюту, и его диаметры.

В 1871 году Клейном была создана первая полноценная модель плоскости Лобачевского. Плоскость – внутренность круга, прямая – хорда круга без концов, а точкой – точка внутри круга. «Движение» – любое преобразование круга в самого себя, переводящее хорды в хорды. Соответственно, равными называются фигуры внутри круга, переводящиеся одна в другую такими преобразованиями. Любое утверждение геометрии Лобачевского на плоскости – есть утверждение евклидовой геометрии, относящееся к фигурам внутри круга, лишь пересказанное в указанных терминах. Евклидова аксиома о параллельных здесь не выполняется, так как через точку P, не лежащую на данной хорде a (то есть «прямой»), проходит сколько угодно не пересекающих её хорд («прямых»).

Широко распространено заблуждение (отражённое, в частности, в нематематической литературе и фольклоре), что в геометрии Лобачевского параллельные прямые пересекаются. Во-первых, параллельные прямые не могут пересекаться (ни в одной геометрии) по определению параллельности. Во-вторых, в геометрии Лобачевского как раз можно провести через точку, не лежащую на данной прямой, бесконечно много прямых, не пересекающихся с ней.

Различия между геометрией Лобачевского и геометрией Евклида кроются в понимании самой природы пространства. Физическое трехмерное пространство искривлено, и лишь в бесконечно малых областях его можно считать плоским, евклидовым.

В наших земных пределах этой кривизной можно пренебречь и пользоваться положениями и теоремами евклидовой геометрии, а при измерении космических расстояний верны теоремы геометрии Лобачевского.

4. Применение неевклидовой геометрии в жизни

Важное практическое приложение геометрии Лобачевского нашел русский физик Александр Фридман. Используя в 1922 году идеи теории относительности и решая уравнение Эйнштейна, он пришел к выводу, что Вселенная расширяется с течением времени. Вскоре эта теория блестяще подтвердилась на практике, но уже, как это часто бывает, после смерти Фридмана. Наблюдения американского астронома Эдвина Хаббла подтвердили это. В 1929 году он, не знакомый с теорией Фридмана, обнаружил, что удаленные туманности как бы «разбегаются» в разные стороны. При этом скорость этого «разбегания» оказалась пропорциональна расстоянию между ними. Законы сложения относительных скоростей, полученные Альбертом Эйнштейном, напрямую связаны с геометрией Лобачевского. Эта связь основана на том, что равенство, выражающее закон распространения света $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ при делении на t^2, даёт $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2$ – уравнение сферы в пространстве с координатами v_x, v_y, v_z – составляющими скорости по осям x, y, z (в «пространстве скоростей»). А в1950-х годах советский физик Н.А. Черников стал успешно использовать геометрию Лобачевского для исследования столкновений элементарных частиц в ускорителе, а также при изучении других вопросов физики элементарных частиц и ядерных реакций.

Сам Лобачевский применял неевклидову геометрию для вычисления определенных интегралов при нахождении длины, площади или объема фигуры в своей геометрии. Но применение новых знаний не ограничилось математикой.

Также геометрия Лобачевского используется в астрономии: при описании голографической Вселенной или черных дыр.

Интересно применение в игровой индустрии: игра «Жизнь» (модель зарождения жизни во «Вселенной») или HyperRogue (гибрид паззла и рогалика на гиперболической плоскости). Одной из ее главных особенностей является уникальная игровая геометрия, необычная реализация миров, созданных на гиперболической плоскости, состоящей из шести и семиугольников. При создании игрового мира использовалась система неевклидовой геометрии, где сумма углов треугольника всегда меньше 180°.

Применяется геометрия Лобачевского в живописи. В 2013 году в московском Музее современного искусства прошла выставка Маурица Корнелиса Эшера. Нидерландский художник-график известен благодаря своим работам, где он использует различные математические понятия, приемы и теории: пределы, ленты Мебиуса, геометрию Лобачевского. Заинтересовали работы-иллюзии и орнаменты. Самые знаменитые работы Эшера построены как визуальные обманки, но по сути являются визуальным воплощением неевклидова пространства. Эшер не доказывал теорем с помощью своих рисунков, просто демонстрировал удивительные возможности нашего восприятия. Один из интересных примеров проявления неевклидовой геометрии в работах Эшера – «Картинная галерея». Еще один пример неевклидового пространства в работах Эшера – гравюра «Относительность».

Один из примеров можно увидеть в работе «Предел круга III». Здесь представлена одна из моделей геометрии Лобачевского (модель Пуанкаре).

Рис. 7 «Относительность»

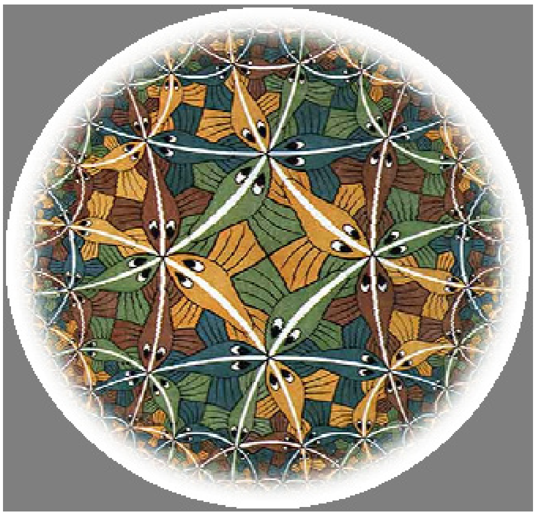


Рис. 8. «Предел круга III»

В 2015 году в Центральном зале центра дизайна ARTPLAY прошла еще одна не менее интересная выставка «Ван Гог. Ожившие полотна (Van Gogh Alive)». На его картинах отсутствует ровный фон, геометрия вангоговского пространства подчиняется законам, которые только предстояло открыть учёным 19-го столетия.

Использование геометрии Лобачевского в искусстве не ограничивается живописью.

Творчество Фрэнка Гери тому доказательство. Он продемонстрировал возможности современных технологий проектирования. Деконструктивизм и теория нелинейной архитектуры подчиняются формулам геометрии Лобачевского. Его здания похожи друг на друга словно детали «конструктора из титана», но «мнет и гнет» он их каждый раз по-другому. В этом заключается уникальность дизайна построенных объектов.

Рис. 9. Архитектура в Лос-Анджелесе

Рис. 10. Музей в г. Сидней

Мы вдохновились идеями Ф. Гери, поэтому решила найти элементы геометрии Лобачевского в архитектуре других стран.

Рис 11. Футбольный стадион «Казань -арена»

Рис.12. Музей Гуггейнхейма в Испании

Рис. 13. Многофункциональный комплекс в Китае

Мы выяснили, что еще один архитектор в своем творчестве подчинялся законам неевклидовой геометрии. С помощью фоторедактора художник превращает городские здания в футуристическую архитектуру. Эти «Городские портреты» – маленький виртуальный мир Виктора Энрича, в котором нет никаких ограничений для фантазии.

В реальном мире тоже можно легко найти модели гиперболических поверхностей. Не стоит далеко ходить, достаточно рассмотреть в качестве гиперболической поверхности седло для верховой езды. Сумма углов любого треугольника, нарисованного на такой поверхности, составляет менее 180°, и параллельные линии здесь не находятся друг от друга на фиксированном расстоянии, а постепенно расходятся.

время будет топорщиться. Это происходит из-за того, что клетки, которые находятся

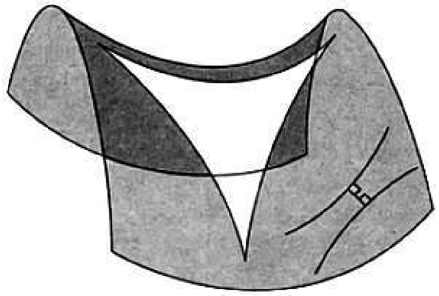


Рис. 14

на границе листа, растут так, что их рост ничем не ограничен. С удалением от центра длина круга растет пропорционально радиусу и в результате она станет больше, чем $2\pi r$.

В обычной спальне я провел небольшой эксперимент, чтобы понаблюдать, как в гиперболическом мире движутся различные предметы. Нам потребовалась кровать с ровной поверхностью, как на евклидовой плоскости. На нее мы поставили подвижный объект (см. рисунок ниже). Рядом с ним положила тяжелый предмет, так чтобы постель прогнулась. Теперь поверхность уже не является плоской, она искривилась. Из-за этой кривизны подвижный объект будет скользить к тяжелому предмету. Поверхность постели вокруг тяжелого предмета похожа на гиперболическую поверхность.

А вот профессор Университета Корнелла в Нью-Йорке Дайна Тайминя разрешила столетнюю проблему неевклидовой геометрии по визуализации гиперболических плоскостей. Свою первую модель гиперболической плоскости она связала крючком в 1997 году, чтобы использовать в студийном курсе неевклидовой геометрии. С тех пор она связала более сотни геометрических моделей. На данный момент она имеет признание на международном уровне из-за того, что благодаря ее необычному открытию, что модель гиперболической плоскости, которую нельзя изготовить даже с помощью компьютера, возможно сделать, используя вязание крючком. Красивые, математически описываемые сложными формулами модели, похожие на жителей морских глубин.

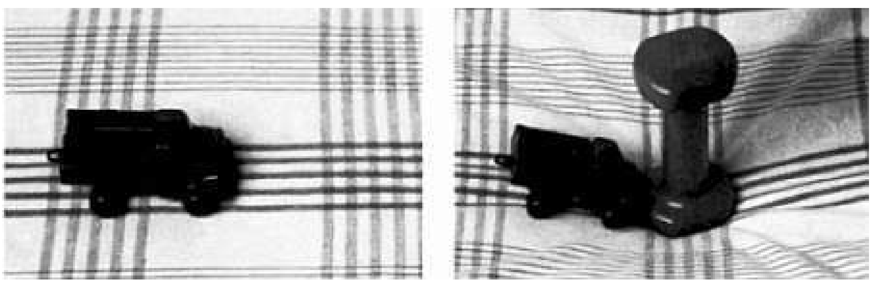


Рис. 15

Гиперболические пространства (т.е. пространства, в которых действуют законы гиперболической геометрии) встречаются и в самой природе. Например: Геометрия Лобачевского проглядывается в структурах кораллов, в организации клеточных структур у растении, у некоторых цветков.

В частности, если взять лист салата, то его нельзя уложить плоско, если попытаться его разгладить на плоскости, он все

Рис. 16. Каллы

Рис. 17. Листья салата

Рис. 18. Коралл

Рис. 19

Изучив литературу по данному вопросы, мы задумали провести опрос среди 9–11 классов: насколько же эрудированны в данной области наши ровесники?

Большинство обучающихся знают, кем был Н.И. Лобачевский, чем отличается его геометрия от привычной нам евклидовой, где ее можно применять. Применение геометрии Лобачевского не ограничивается одной математикой, существуют и другие области ее применения. Благодаря зрительным искажениям, существует искусство (живопись, архитектура). Но одних наблюдений недостаточно, необходимо опираться на доказательства. «Новая», неевклидова геометрия открывает широкие возможности различным направлениям наук.

Заключение

Геометрия Лобачевского – геометрическая теория, основанная на тех же основных посылках, что и обычная евклидова геометрия, за исключением аксиомы о параллельных прямых, которая заменяется на аксиому о параллельных Лобачевского. Данная теория совершенно верна, если ее рассматривать не на плоскости, а на поверхности вогнутой поверхности, напоминающей седло (гиперболического параболоида).

В ходе работы:

• мы изучили учебную литературу, связанную с жизнью Лобачевского;

• познакомились с особенностями его теории;

• рассмотрели применение неевклидовой геометрии в современной жизни. Сам Лобачевский пытался рассмотреть свою теорию в рамках геометрии (пятого постулата), но другие области нашей жизни активно используют положения его теории. Это и физика, и астрономия, и искусство (живопись и архитектура), и игровая индустрия. Задача современного человека – повышение уровня своего образования, изучать новое и видеть применение полученных знаний. Надеюсь, что учащиеся, услышав о геометрии Лобачевского, заинтересуются этим вопросом, оглянутся вокруг, смогут объяснить какие-либо явления, а возможно, и сделают открытие.

Таким образом, цель работы достигнута, задачи выполнены, гипотеза подтверждена.

Список литературы

1. 45 параллель [Электронный ресурс] // Хризантемы – лепестков протуберанцы. – URL: https://45parallel.net/hrizantemy_lipestkov_protuberantsy.

2. Blogger [веб-сервис] // Искусство. – URL: http://olgasycheva31.blogspot.ru/2013/08/blog-post_7432.html.

3. Steam [Электронный ресурс] // Руководство по HyperRogue. – URL: http://steamcommunity.com/sharedfiles/filedetails/?id=401559432.

4. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. [и др.] Геометрия/ 7 – 9 классы. – М.: Просвещение, 2010.

5. Википедия [Электронный ресурс] // Угол параллельности. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%9B%D0%BE%D0%B1%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE#/media/File:Hyperbolic.svg.

6. Википедия [Электронный ресурс]//Геометрия Лообачевского. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%9B%D0%BE%D0%B1%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE.

7. Лента.ру [Электронный ресурс] // Что такое голографическая Вселенная? – URL: https://lenta.ru/articles/2015/05/10/hologram/.

8. Официальный сайт факультета физики, математики и информатики Ивановского университета [Электронный ресурс] // Геометрия Лобачевского – вокруг нас! – URL: http://math.ivanovo.ac.ru/school/j/lobach/lobachevsky.html.

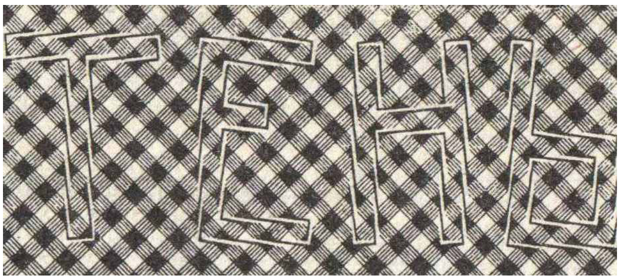
9. Публикации Хабрахабр [Электронный ресурс] // Жизнь на плоскости Лобачевского. – URL: https://habrahabr.ru/post/168421/.

10. Строительство. Архитектура [Электронный ресурс] // Геометрия Лобачевского. – URL: http://www.apxu.ru/article/geoforma/whatt/geometria_loba4evckogo.htm.

11. Фонд поддержки современного искусства [Электронный ресурс] // Неевклидова геометрия архитектуры. – URL: http://www.fondartproject.ru/artprocess/neehvklidova-geometrija-arkhitektury/.

Приложение 1

1. Слышали ли вы фамилию Лобачевский? Кем он был?
2. В чем отличие геометрии Лобачевского от геометрии Евклида?
3. Где можно применить неевклидову геометрию?
4. Как расположены буквы на картинке: параллельно (стоят прямо) или нет?



5. Что изображено на картинке: спираль или несколько окружностей?