

## ИСТОРИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ

Павлова П.А.

г. Волгоград, МОУ СП № 105, 9 А класс

Руководитель: Уланкина Т.П., г. Волгоград, МОУ СП № 105, учитель математики и информатики

Тригонометрия – раздел математики, в котором изучаются тригонометрические функции и их приложения к геометрии. Слово тригонометрия состоит из двух греческих слов: «*trigwnon*» – «треугольник» и «*metrew*» – «измерять», означает – «измерение треугольников». Именно эта задача – «измерение треугольников» или «решение треугольников», определение всех элементов треугольника по трем данным, с древнейших времен составила основу практических приложений тригонометрии.

Актуальность: знакомство с новым предметом – тригонометрией.

Цель: Расширить знания по истории развития тригонометрии.

Задачи:

1. Чем вызвана к жизни наука тригонометрия

2. Применение тригонометрии в астрономии, физике, биологии и медицине.

Объект: тригонометрия, история зарождения и развития тригонометрии.

Гипотеза: многие физические явления природы можно описать с помощью тригонометрии.

Новизна: знакомство с тригонометрией.

Методика исследования. Изучение литературы по данной теме, информации из Интернет-ресурсов. Обобщение найденного материала.

Продукт: Буклет «История тригонометрии».

Практическая значимость: данный материал можно использовать на уроках геометрии и тригонометрии для дополнительного образования. Любой ученик может развить в себе интерес к науке тригонометрии через данный материал.

### Возникновение тригонометрии

Исторически тригонометрия сложилась из задач на решение плоских и сферических треугольников.

Как и всякая другая наука, тригонометрия возникла в результате человеческой практики в процессе решения конкретных практических задач.

Возникновение тригонометрии тесно связано с развитием одной из древнейших наук – астрономии. Главная роль принадлежит ей в формировании и развитии сферической тригонометрии. Со времен древне-

го Вавилона до времени Эйлера и Лапласа астрономия была руководящей и вдохновляющей силой самых замечательных математических открытий.

Развитие астрономии, вызвано, в первую очередь, необходимостью составления правильного календаря, имевшего важное значение для земледельческого хозяйства древности. Земледельцу нужно было знать смену времен года, чтобы своевременно производить необходимые сельскохозяйственные работы. Календарь был необходим также и служителям культа, исполняющим религиозные обряды, для определения дней праздников и многим другим лицам.

Развитие торговли, связанное с необходимостью передвижения, как по суше, так и водным путем, оказало большое влияние на развитие астрономии: нужно было уметь правильно определять курс корабля в открытом море.

Значительную роль в развитии астрономии и связанной с ней тригонометрии сыграла, несомненно, потребность в составлении точных географических карт, это требовало правильного определения больших расстояний на земной поверхности.

Врачам нужна была астрономия, алгебра и тригонометрия для астрологических вычислений, чтобы составить гороскоп больного и по расположению планет в созвездиях определить, поправится больной или нет.

Эти и другие стороны деятельности человека уже в глубокой древности наталкивались на необходимость ознакомления с положением и видимым движением небесных светил (Солнца, Луны, звезд).

Уровень развития математики у древних народов Двуречья был более высоким, чем у других восточных народов. У древних народов Двуречья были особенно развиты астрономические наблюдения. Следовательно, они владели некоторыми простейшими сведениями из тригонометрии. Уже 2-3 тысяч лет до нашей эры древние египтяне практически использовали астрономические наблюдения при работах по сельскому хозяйству. Разливы Нила были важны фактором в развитии земледелия.

В классическом китайском трактате «математика в девяти книгах», составленном во II-І веках нашей эры по более ран-

ним источникам, в книге IX трактата собран ряд задач на применение прямоугольных треугольников, где есть задачи на определение расстояния до недоступных предметов. Больших успехов в астрономии добились древние майя, ими был создан достаточно точный календарь (календарно-хронологическая система).

#### *Тригонометрия в Древней Греции*

Значительно позднее тригонометрия вступила в следующий этап своего развития в древней Греции, как часть астрономии. В связи с потребностями астрономии и геодезии первостепенное значение получили вычислительные задачи сферической тригонометрии. Некоторое знакомство с сферической тригонометрией имел еще Фалес Милетский (640 – 548 гг. до н.э. – древнегреческий математик и астроном (Приложение 1); в первой половине 3 веке до н.э. древнегреческий астроном и математик Аристарх Самосский (310 – 230 г.г. до н.э.); Архимед (Приложение 1), высказал смелую гипотезу о том, что Земля движется по кругу около Солнца (за это его обвинили в безбожии и изгнали из Афин).

Уже в середине I тысячелетия до н.э. древнегреческие ученые знали, что Земля имеет форму шара, в частности длины его окружности. Были разработаны некоторые методы решения этой задачи. Первое измерение дуги меридиана и радиуса Земли принадлежит Эратосфену Киренскому (ок. 276 – 194 гг. до н.э.) – древнегреческому математику, географу, историку, философу, поэту (Приложение 1).

Но основополагающее значение для развития тригонометрии в эпоху ее зарождения имели работы древнегреческого ученого Гиппарха (ок. 180 – 125 г.г. до н.э.) (Приложение 1) – основателя научной астрономии.

Гиппарх составил звездный каталог с тем, чтобы будущие астрономы могли следить за появлением новых звезд и исчезновением старых. В каталог было занесено положение на небе более 1 тысячи звезд, подразделенных им по блеску на 6 звездных величин и определенных им по блеску на 6 звездных величин и определенных для того времени весьма точно. Гиппарх явился основоположником математической географии. Им было введено определение точек на земной поверхности при помощи географических координат – широты и долготы.

Важно отметить, что тригонометрии как науки в современном смысле этого слова не было ни у Гиппарха, ни у других ученых древности. Но они, пользуясь известными им положениями элементарной геометрии, решали те задачи, которые сейчас относятся

к тригонометрии. В основе всех тригонометрических вычислений у греков лежала известная еще Гиппарху теорема Птолемея, которую можно сформулировать так: «Произведение диагоналей вписанного в круг четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон».

#### *Тригонометрия в Индии*

Следующий шаг по развитию тригонометрии связан с развитием математической культуры народов индии с IV по XII вв. Наряду с «синусом» индийцы ввели в тригонометрию «косинус», точнее говоря, стали употреблять в своих вычислениях линию косинуса. Сам термин «косинус» появился значительно позднее в работах европейских ученых австрийского математика Пейрбаха или Пурбаха (1423 – 1461) и немецкого математика Региомонтана (1436 – 1476) . (Приложение 1).

Индийцам было так же известно соотношение  $\sin^2 a + \cos^2 a = r^2$ , а также формулы для синуса половинного угла и синуса суммы и разности двух углов. Таким образом, индийцы положили начало тригонометрии как учению о тригонометрических величинах, хотя у них и было мало внимания отведено как раз решению треугольников. Для измерений высот и расстояний были разработаны несколько правил, основанных на изменении тени вертикального шеста – гномона и на подобии треугольников. Все это предвосхищало введение тангенса и котангенса.

#### *Тригонометрия в странах Арабского Халифата*

Следующий этап в развитии тригонометрии связан с расцветом культуры стран арабского халифата. Так называлось объединение различных стран и народов, захваченных арабами в VII – VIII вв. в него входили таджики, узбеки, персы, азербайджанцы, египтяне, сирийцы и другие народы. Многие из этих народов стояли на более высоком уровне общественного и культурного развития, чем сами арабы. Необходимые сведения по астрономии вместе с тригонометрией, алгеброй и арифметикой были заимствованы в первые из Индии. И хотя индийская математика дала начало развитию арабской математики, господствующее положение в нарождающейся науке у арабов занимала греческая геометрия и астрономия, благодаря переводом всех трудов Евклида, Аполлония, Архимеда, Птолемея и их позднейших комментаторов. Особенно велик вклад, внесенный арабоязычными народами в математику. Это прежде всего десятичная система счис-

ления, позаимствованная арабами у индийцев и позже, благодаря трудам арабоязычных ученых, получившая распространение в Европе. Успехи в математике, в частности в тригонометрии, создали основу для достижений в астрономии и в некоторых других науках.

Тригонометрия и здесь развивалась в тесной связи с астрономией и географией и носила ярко выраженный «вычислительный» характер.

В Багдаде в разное время занимались научной работой такие ученые, как ал – Хорезми (783 – 830), ал – Хабаш (764 – 874), Ибн кора (836 – 901), Ибн Ирак (965 – 1035), ал – Бируни (973 – 1050) (Приложение 1) .

Ал – Хорезми внес большой вклад в развитии математики, астрономии и математической географии. Его труды в течение нескольких столетий оказывали сильное влияние на ученых Востока и Запада и долго служили образцом при написании учебников математики. Два его трактата по арифметики и алгебре сыграли большую роль в развитии математики.

#### *Тригонометрия в Европе*

В XII вв Европе возникает городская культура, развиваются товарно–денежные отношения внутри феодальной системы хозяйства. Этому способствовали также торговые путешествия и крестовые походы, позволившие частично познакомиться не только с движениями восточной культуры, но и с культурой древней Греции. Начинается самостоятельное творчество европейских ученых. Им пришлось заново открывать многое из того, что открыто было задолго до них. Первые их достижения относятся именно к тригонометрии. Эта наука разливалась в основном на базе достижений древних греков. Появились переводы некоторых «арабских» сочинений по тригонометрии. На основе этих сочинений в Англии были написаны работы по тригонометрии Р. Уоллигфордом (ок. 1292 – 1335) и его современником Д. Модюктом. Английский ученый Томас Брадвардин (ок. 1290 – 1349) (Приложение 1). Он впервые в Европе предложил единичный радиус тригонометрического круга, ввел в тригонометрические вычисления котангенс под назначением «прямой тени» и тангенс под назначением «обратной тени». В этот период составляют таблицы синусов.

Региомонтан, независимо от арабов (опередивших его на 400 лет) и Т.Бродвардина, ввел в еврейскую науку функцию тангенса, составил таблицу синусов через  $1'$  и таблицу тангенсов через  $1^\circ$ . он составил так же таблицу для вычисления катета прямоугольного треугольника (сфериче-

ского ) по лежащему против него углу А и по гипотенузе С согласно формуле  $\sin A = \sin C \sin A$ , назвав ее таблицей «с двойным входом». Эта работа Региомонтана (Приложение 1) сыграла очень большую роль в дальнейшем развитии тригонометрии.

Важный вклад в развитие тригонометрии внес польский астроном Николай Коперник (1473 – 1543) (Приложение 1), создатель гелиоцентрической системы мира, реформатор астрономии. Не знакомый с работами Региомонтана, Коперник самостоятельно обосновал некоторые основные положения сферической тригонометрии; он впервые сводит все дело к трехграннику, проектирующему треугольник из центра. Коперник сам занимался составлением тригонометрических таблиц. Немецкий математик Петер Крюгер (1480 – 1532) был первым из европейских математиков, составивших отдельно таблицы логарифмов тригонометрических функций и таблицы логарифмов чисел. Датский математик Томас Финк (1561 – 1656) (Приложение 1) в работе «Геометрия круглого»(1583) впервые вводит термины «синус», «тангенс» и «секанс».

Английский математик Абрахам Муавр (1667 – 1754) (Приложение 1), по происхождению француз, находит правило для возведения в степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, которое широко применяется в тригонометрии и алгебре при решении двухчленных уравнений и известно теперь как «формула Муавра».

В настоящее время тригонометрия перестала существовать как самостоятельная наука, распавшись на две части. Одна из этих частей представляет собой учение о тригонометрических функциях, а другая – вычисление элементов тригонометрических фигур.

Первая часть, как мы уже говорили выше, входит в состав математического анализа, располагающего общими методами исследования функций, а вторая часть относится к геометрии и играет в ней вспомогательную роль.

«Геометрическая» часть тригонометрии в свою очередь распадается на два раздела – «прямолинейную тригонометрию» и «сферическую тригонометрию». Основным содержанием первого раздела является вычисление элементов плоских треугольников, а второго раздела – вычисления элементов сферического треугольника.

#### **Применение тригонометрии**

Продолжая тему тригонометрии важно отметить, что тригонометрические вычисления применяются практически во всех сферах жизнедеятельности людей: астро-

номии, физике, природе, музыке, медицине, биологии и многих других.

### *Тригонометрия в астрономии*

Так в астрономии возникла потребность в «решении треугольников».

Составленные Гиппархом таблицы положений Солнца и Луны позволили предвычислять моменты наступления затмений (с ошибкой 1–2 ч). Гиппарх впервые стал использовать в астрономии методы сферической тригонометрии.

### *Тригонометрия в физике*

В окружающем нас мире приходится сталкиваться с периодическими процессами, которые повторяются через одинаковые промежутки времени. Эти процессы называются колебательными. Колебательные явления различной физической природы подчиняются общим закономерностям и описываются одинаковыми уравнениями. Существуют разные виды колебательных явлений.

Механические колебания. Механическими колебаниями называют движения тел, повторяющиеся точно через одинаковые промежутки времени. Графическое изображение этой функции дает наглядное представление о протекании колебательного процесса во времени. Примерами простых механических колебательных систем могут служить груз на пружине или математический маятник.

### *Тригонометрия в природе*

Впервые теория радуги была дана в 1637 году Рене Декартом. Он объяснил радугу, как явление, связанное с отражением и преломлением света в дождевых каплях.

Северное сияние Проникновение в верхние слои атмосферы планет заряженных частиц солнечного ветра определяется взаимодействием магнитного поля планеты с солнечным ветром.

Сила, действующая на движущуюся в магнитном поле заряженную частицу называется силой Лоренца. Она пропорциональна заряду частицы и векторному произведению поля и скорости движения частицы.

### *Тригонометрия в медицине*

Ученые утверждают, что мозг оценивает расстояние до объектов, измеряя угол между плоскостью земли и плоскостью зрения.

К тому же в биологии используется такое понятие как синус сонный, синус каротидный и венозный или пещеристый синус.

Тригонометрия играет важную роль в медицине. С ее помощью иранские учёные открыли формулу сердца – комплексное алгебраически-тригонометрическое

равенство, состоящее из 8 выражений, 32 коэффициентов и 33 основных параметров, включая несколько дополнительных для расчетов в случаях аритмии.

### *Тригонометрия и тригонометрические функции в медицине и биологии, музыке*

Одно из фундаментальных свойств живой природы – это цикличность большинства происходящих в ней процессов. Биологические ритмы, биоритмы – это более или менее регулярные изменения характера и интенсивности биологических процессов. Основной земной ритм – суточный. Модель биоритмов можно построить с помощью тригонометрических функций.

Тригонометрия играет важную роль в медицине. С ее помощью иранские учёные открыли формулу сердца – комплексное алгебраически-тригонометрическое равенство, состоящее из 8 выражений, 32 коэффициентов и 33 основных параметров, включая несколько дополнительных для расчетов в случаях аритмии.

Биологические ритмы, биоритмы связаны с тригонометрией. Модель биоритмов можно построить с помощью графиков тригонометрических функций. Для этого необходимо ввести дату рождения человека (день, месяц, год) и длительность прогноза.

Движение рыб в воде происходит по закону синуса или косинуса, если зафиксировать точку на хвосте, а потом рассмотреть траекторию движения.

При полёте птицы траектория взмаха крыльев образует синусоиду.

Частоты, соответствующие одной и той же ноте в первой, второй и т.д. октавах, относятся, как 1:2:4:8...

диатоническая гамма 2:3:5

### **Заключение**

В ходе исследовательской работы расширились знания по тригонометрии, изучены материалы по истории тригонометрии и сделан вывод о том, что *тригонометрия была вызвана к жизни необходимостью производить измерения углов, но со временем развилась и в науку о тригонометрических функциях*.

Выяснили, что тригонометрия исторически сложившаяся наука. Она была вызвана к жизни необходимостью производить измерения углов, но со временем развилась и в науку о тригонометрических функциях.

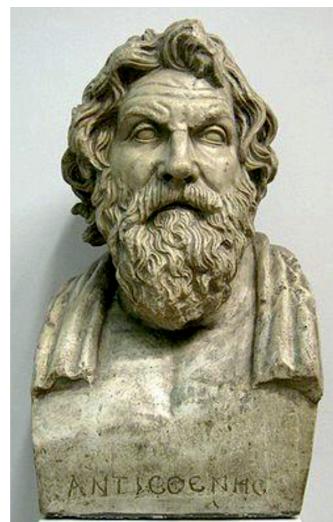
Убедились, что тригонометрия перестала существовать как самостоятельная наука, распавшись на две части.

Думаем, что тригонометрия не только нашла своё применение в жизни человека, что сферы применения её будут расширяться.

Ученые, внёсшие вклад в развитие тригонометрии



Фалес Милетский



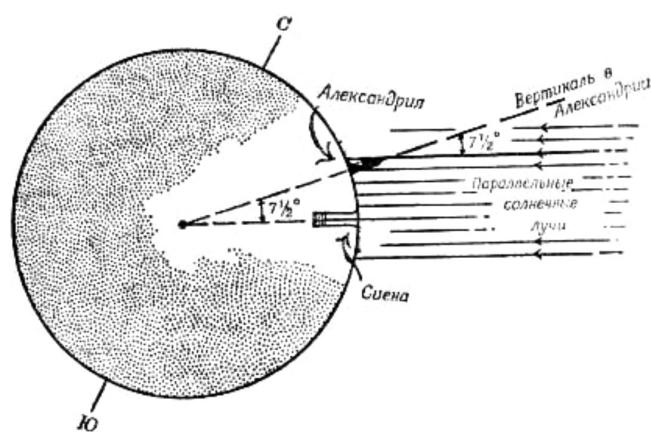
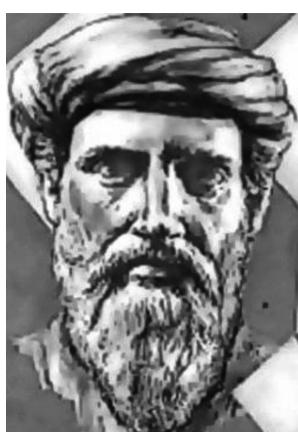
Аристарх Самосский



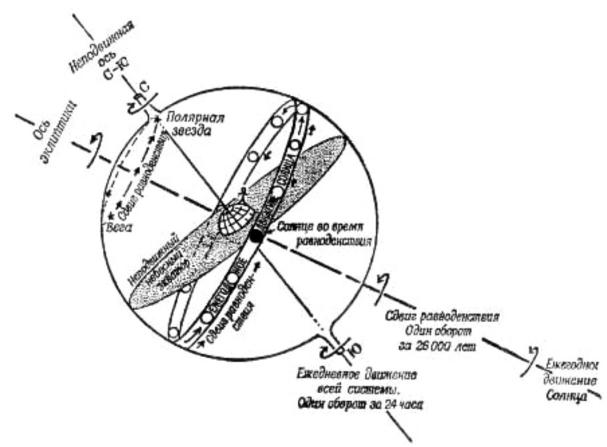
Архимед



Виета



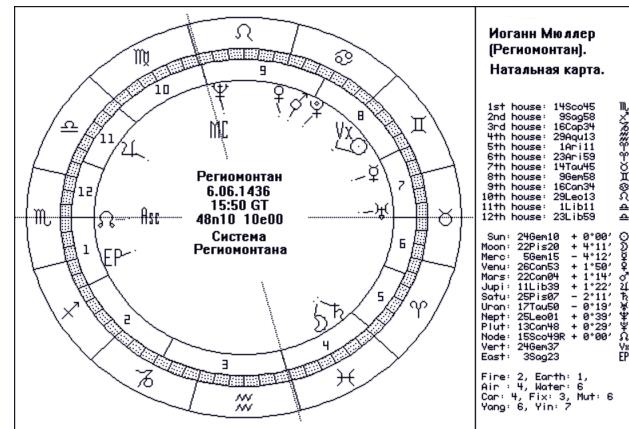
Эратосфен Киренский



Гиппарх



Пейрбах



Региомонтана



Томас Брадвардин



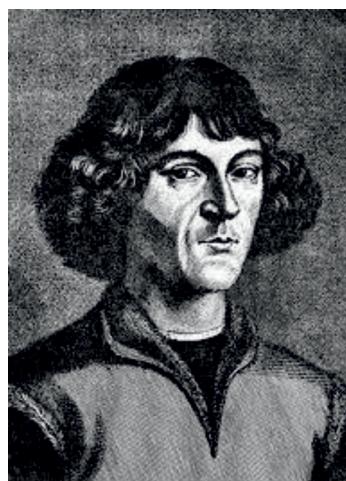
Хорезми



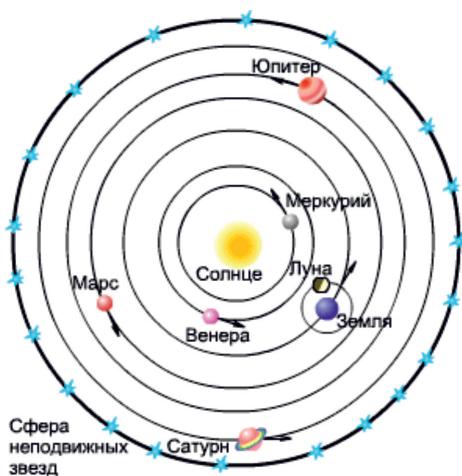
Ибн кора

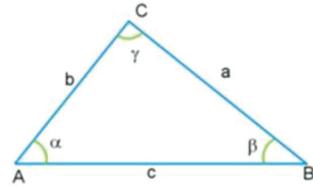


ал – Бируни



Николай Коперник

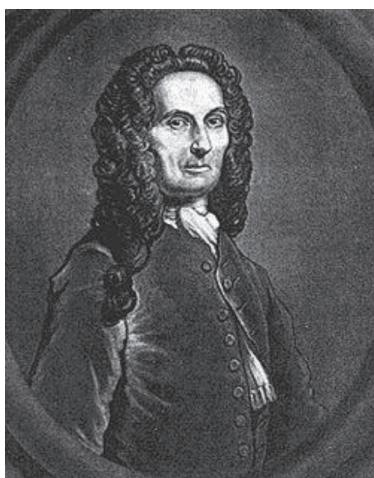




Томас Финке предложил оригинальное решение геодезической задачи: найти углы треугольника, если известна их сумма  $\alpha + \beta$  и отношение противолежащих сторон  $a : b$ . Для решения Финке использовал формулу Региомонтано (см. рисунок):

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Томас Финке



**Формула Муавра.**  
 $[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ , где  $n$  – целое число.

**Корень  $n$ -й степени из комплексного числа.**  
 Если  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , то корень  $n$ -й степени из данного числа определяется формулой

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

и имеет точно  $n$  различных значений.

Абрахам Муавр

### Список литературы

1. <https://ru.wikipedia.org/wiki/>.
2. <https://www.ucheba.ru/>.
3. <http://www.math.ru/> библиотека.
4. <https://sites.google.com/site/trigonometry> история тригонометрии.
5. <http://fb.ru> история тригонометрии.
6. Волошинов. Математика и искусство // Москва, 1992 г. Газета.
7. История математики с Древнейших времен до начала XIX столетия в 3-х томах// под ред. А. П. Юшкевича. Москва, 1970г. – том 1-3 Э. Т. Бэлл Творцы математики.
8. Маслова Т.Н. «Справочник школьника по математике» М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008. – 672 с.
9. Математика. Приложение к газете от 1.09.98 г.
10. Предшественники современной математики // под ред. С.Н. Ниро. Москва, 1983.
11. А.Н. Тихонов, Д.П. Костомаров. Рассказы о прикладной математике // Москва, 1979 г.