

**ЗАДАЧИ НА КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ. ФОРМУЛА ПИКА****Ратникова К.В.***МБОУ СОШ № 32 с углубленным изучением английского языка, 9 класс**Руководитель: Комарова Н.А., МБОУ СОШ № 32 с углубленным изучением английского языка, учитель математики высшей категории*

В 21 веке, некоторым детям, порой сложно запомнить огромное количество информации, поступающей каждый день в школе, и даже вызубренные формулы по математике, которые используются для нахождения площади различных фигур, будь то треугольник, параллелограмм или трапеция, часто забываются. Повторяя тему «Площади фигур», на уроке было задано одно задание домой на дополнительную отметку – найти площадь многоугольника, изображенного на листе в клетку. Таких многоугольников в курсе геометрии мы не изучали и с данным заданием не все справились дома. Мне стало интересно, каким же другим способом можно решить эти задания. И в интернете я нашла интересную статью про уникальную формулу Пика, которая используется для нахождения площади фигуры на клетчатой бумаге. Для того чтобы изучить ее более подробно, я решила выбрать эту тему для моего научного проекта.

**Предмет исследования**

Предметом исследования моего проекта являются задачи на нахождение площадей разных фигур, изображенных на клетчатой решетке, для решения которых можно использовать разнообразные формулы. Главной формулой будет формула Пика.

**Цели исследования**

Проверить, на самом ли деле формула Пика помогает более легким путем вычислить площади геометрических фигур.

Для достижения поставленной цели нужно решить следующие задачи:

1. Познакомиться с различными ресурсами, как в интернете, так и в энциклопедиях и библиотеке.
2. Подобрать наиболее интересный материал, который максимально раскроет смысл данной темы.
3. Привести в особую систему, полученную нами информацию.
4. Найти еще дополнительные и различные методы нахождения площади фигур, построенных на клетчатой бумаге.
5. Провести собственную практическую работу.
6. Попробовать объяснить эту тему моим сверстникам на одном из уроков математики.

7. После решения задач, проанализировать, всем ли удобна данная формула.

**Проблемные вопросы**

Всегда ли работает формула Пика?

При различных вычислениях по формуле Пика или по другим геометрическим формулам получаются одинаковые результаты?

**Гипотеза**

Площадь фигуры, вычисленной по формуле Пика равна площади фигуры, вычисленной по формуле планиметрии.

**Этапы исследования**

- I. Определить источник информации.
- II. Формулировка цели и задач исследования.
- III. Выдвижение гипотезы.
- IV. Сбор информации через опросы одноклассников.
- V. Анализ экспериментальных данных.
- VI. Формулирование выводов.
- VII. Оформление результатов.

**Методы исследования**

1. Анализ литературы.
2. Поиск информации.
3. Опрос.
4. Анализ.
5. Эксперимент.

**Ожидаемые результаты**

Создать наглядные пособия по исследуемой теме в форме компьютерной презентации, которую можно использовать учителю на уроке и стенда в помощь школьникам.

**Теоретическая часть***Биография Георга Александра Пика*

Родился Георг Пик в еврейской семье. Его отец Адольф Йозеф Пик возглавлял частный институт. До одиннадцати лет Георг получал образование дома (с ним занимался отец), а затем поступил сразу в четвертый класс гимназии. В шестнадцать лет Пик сдал выпускные экзамены и поступил в университет в Вене. Уже в следующем году Пик опубликовал свою первую работу по математике. После окончания университета в 1879 г. он получил право преподавать математику и физику. В 1880 г. Пик защи-

тил докторскую диссертацию, а в 1881 г. получил место ассистента на кафедре физики Пражского университета. В 1888 г. он был назначен экстраординарным профессором математики, затем в 1892 году в Немецком университете в Праге – ординарным профессором (полным профессором). В 1900–1901 гг. занимал пост декана философского факультета.

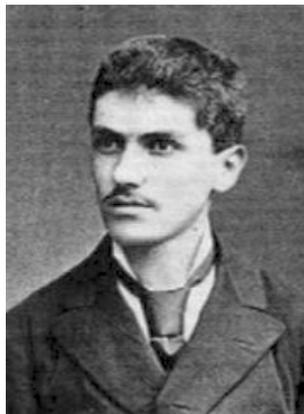


Рис. 1. Георг Александр Пик (10.09.1859–13.07.1942) – австрийский математик

В 1910 году Георг Пик был членом комитета, созданного Немецким университетом для рассмотрения вопроса о принятии в университет на должность профессора Альберта Эйнштейна, с которым Пик впоследствии подружился. Пик и Эйнштейн имели не только общие научные интересы, но и увлекались музыкой.

В 1927 году Георг Пик вышел в отставку.

В 1928 году он был избран членом-корреспондентом Чешской академии наук и искусств, но в 1939 году, когда нацисты заняли Прагу, был исключён из академии.

В июле 1942 года, в возрасте 82 лет, Георг Пик был депортирован нацистами в лагерь Терезиенштадт, где вскоре умер.

Круг математических интересов Георга Пика был чрезвычайно широк: 67 его работ посвящены многим темам, таким как линейная алгебра, интегральное исчисление, функциональный анализ, геометрия и др. Но больше всего он известен своей теоремой о вычислении площади многоугольника, которая появилась в его восьмистраничной работе 1899 года. Эта теорема оставалась незамеченной в течение некоторого времени после того, как Пик её опубликовал, однако в 1949 г. польский математик Гуго Штейнгауз включил теорему (или как её ещё называют – формулу) в свой знаменитый «Математический калейдоскоп». С этого времени теорема Пика стала широко известна. В Германии формула Пика включена в школьные учебники. [1]

### Квадратная решетка. Формула Пика

**Квадратная решетка** – совокупность точек плоскости или пространства, все координаты которых в некоторой (прямолинейной) системе координат являются целыми числами. [Рис.2]

Клетчатая бумага (точнее – ее узлы), на которой мы часто предпочитаем рисовать и чертить, является одним из важнейших примеров точечной решетки на плоскости. В задачах о фигурах на клетчатой бумаге узел – это угол клетки.

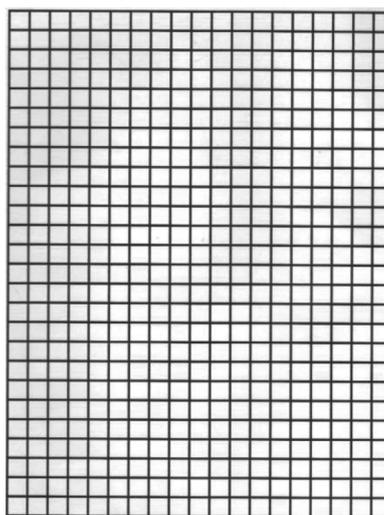


Рис. 2

### Формула Пика

Пусть  $B$  – число узлов решетки, расположенных строго внутри многоугольника,  $\Gamma$  – число узлов решетки, расположенных на его границе, включая вершины,  $S$  – его площадь. Тогда справедлива формула [2]:

$$S = B + \frac{\Gamma}{2} - 1.$$

Например:

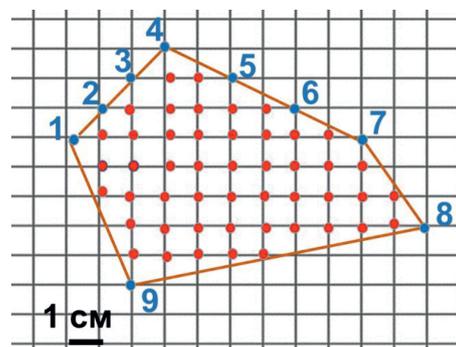


Рис. 3

Отметим узлы:

$\Gamma = 9$  (обозначены синим)

$B = 48$  (обозначены красным) [Рис. 3]

Тогда, используя формулу Пика, получаем:

$$S = 48 + 4,5 - 1 = 51,5 \text{ см}^2$$

### Практическая часть

I этап: декабрь 2017 года

В самую первую очередь я начала разбираться в биографии Георга Пика и мне стало интересно, как долго используется эта замечательная формула и как много людей ее знают и используют. За декабрь я узнала очень много нового об этой формуле. Разбирала задачи на эту формулу, училась её применять. Привела примеры решения задач на нахождение площади выпуклого и невыпуклого многоугольника по формуле геометрии и по формуле Пика. Создала учебную презентацию по нахождению площади выпуклого и невыпуклого многоугольника по формуле геометрии и по формуле Пика.

II этап: январь 2018 года

Затем я решила не тянуть много времени и попробовать эту формулу на практике. Это было очень увлекательное занятие, но в тоже время и очень трудозатратное.

Для начала я построила решетку  $1 \times 1$  см на масштабированной бумаге, но так как

я чертила их маркером, то где-то на линии были неровности, я решила распечатать такую же решетку на принтере, предварительно сделав ее в приложении excel. Затем я начертила от руки какую-то фигуру и попробовала вычислить ее площадь двумя способами формулой Пика и формулами планиметрии, накладывая при этом фигуру на решетку. У меня получились одинаковые результаты. Тогда мне стало интересно, как это будет и с другими фигурами, а так же кругом. Но после моих тщетных попыток посчитать площадь круга, мне пришла мысль в голову, что формула Пика работает только для нахождения площади многоугольников, а круг, в свою очередь, совершенно многоугольник. Представила результаты работы своим одноклассникам.

*№ 1: Решение задач на нахождение площадей многоугольников, изображенных на квадратной решетке*

В задачах, которые будут на экзамене, есть целая группа заданий: «Квадратная решётка: вычисление площади многоугольника», в которых дан многоугольник, построенный на листе в клетку, и стоит вопрос о нахождении его площади. Масштаб клетки –  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ . [Рис.4]

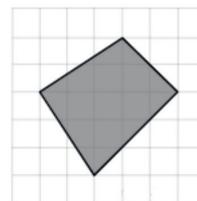
*Например [3]:*

#### 12 Задание 3 № 27554

Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$  (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Аналоги к заданию № 27554: [5309](#) [517170](#) [517208](#) [5311](#) [5315](#) [5317](#) [248883](#) [248885](#) [248887](#) [248889](#) ... [Все](#)

[Решение](#) · [Поделиться](#) · [1 комментарий](#) · [Сообщить об ошибке](#) · [Помощь по заданию](#)



#### 13 Задание 3 № 27555

Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$  (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

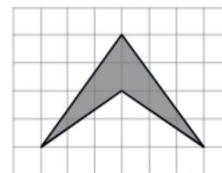


Рис. 4

В курсе геометрии мы изучаем только выпуклые многоугольники, а в заданиях, по подготовке к экзамену, не всегда рассматриваются только выпуклые многоугольники.

Поэтому ниже приведены примеры решения задач на нахождение площади выпуклого и невыпуклого многоугольника по формуле геометрии и по формуле Пика:

**Задание № 1:** Найдите площадь выпуклого многоугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см x 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

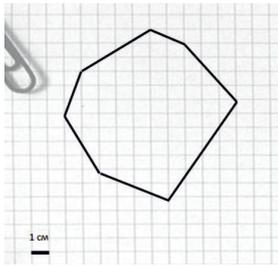


Рис. 5

1. Чтобы вычислить площадь многоугольника, изображенного на рисунке 5.

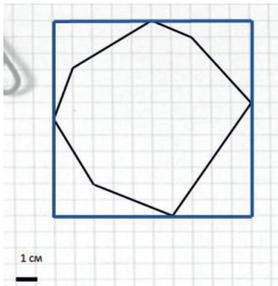


Рис. 6

2. Необходимо достроить его до прямоугольника [Рис.6].  
3. Вычислить площадь этого прямоугольника.  
4.  $S' = 10 \cdot 12 = 120$

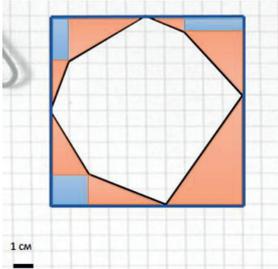


Рис. 7

5. Найти площадь заштрихованной фигуры как сумму площадей треугольников и прямоугольника её составляющих, вычесть её из площади прямоугольника. [Рис.7]

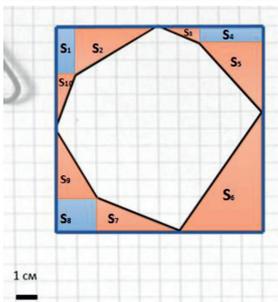


Рис. 8

6.  $S_1 = 1 \cdot 3 = 3$   
7.  $S_2 = 1/2 \cdot 4 \cdot 3 = 6$   
8.  $S_3 = 1/2 \cdot 2 \cdot 1 = 1$   
9.  $S_4 = 1 \cdot 3 = 3$   
10.  $S_5 = 1/2 \cdot 4 \cdot 3 = 6$   
11.  $S_6 = 1/2 \cdot 4 \cdot 7 = 14$   
12.  $S_7 = 1/2 \cdot 4 \cdot 2 = 4$   
13.  $S_8 = 2 \cdot 2 = 4$   
14.  $S_9 = 1/2 \cdot 4 \cdot 2 = 4$   
15.  $S_{10} = 1/2 \cdot 1 \cdot 3 = 1,5$   
16.  $S = S' - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9 + S_{10})$   
17.  $S = 120 - (3 + 6 + 1 + 3 + 6 + 14 + 4 + 4 + 4 + 1,5) = 73,5 \text{ см}^2$

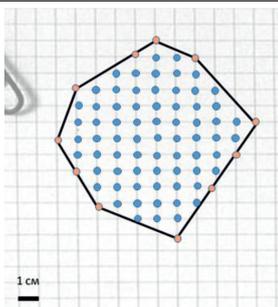


Рис. 9

18. или по формуле Пика [Рис.9]:

$$\begin{aligned} B &= 69 \\ \Gamma &= 11 \\ S &= B + \Gamma/2 - 1 \\ S &= 69 + 11/2 - 1 \\ S &= 73,5 \text{ см}^2 \end{aligned}$$

**Вывод:** площадь фигуры, вычисленной по формуле Пика равна площади фигуры, вычисленной по формулам планиметрии.

**Задание № 2:** Найдите площадь невыпуклого многоугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см x 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

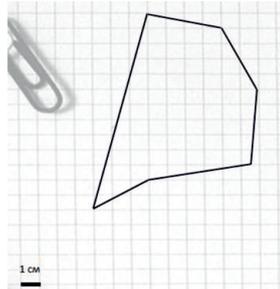


Рис. 10

1. Чтобы вычислить площадь многоугольника, изображенного на рисунке 10.

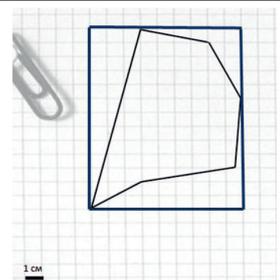


Рис. 11

2. Необходимо достроить его до прямоугольника. [Рис.11]  
3. Вычислить площадь этого прямоугольника.  
4.  $S = 13 \cdot 9 = 117$

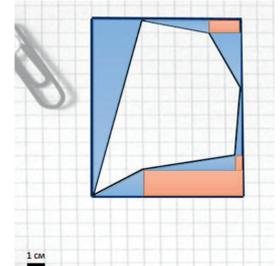


Рис. 12

5. Найти площадь заштрихованной фигуры как сумму площадей треугольников и прямоугольника её составляющих, вычесть её из площади прямоугольника. [Рис.12]

Далее необходимо найти площадь каждой фигуры

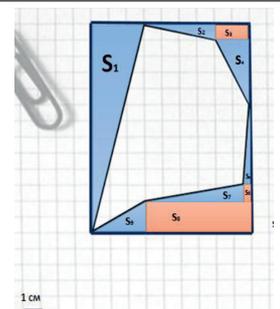


Рис. 13

6.  $S_1 = 1/2 \cdot 13 \cdot 3 = 19,5$   
7.  $S_2 = 1/2 \cdot 4 \cdot 1 = 2$   
8.  $S_3 = 2 \cdot 1 = 2$   
9.  $S_4 = 1/2 \cdot 2 \cdot 4 = 4$   
10.  $S_5 = 1/2 \cdot 5 \cdot 0,5 = 1,25$   
11.  $S_6 = 1 \cdot 0,5 = 0,5$   
12.  $S_7 = 1/2 \cdot 5,5 \cdot 1 = 2,75$   
13.  $S_8 = 6 \cdot 2 = 12$   
14.  $S_9 = 1/2 \cdot 3 \cdot 2 = 3$   
15.  $S = S_{\text{rect}} - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9)$   
16.  $S = 117 - (19,5 + 2 + 2 + 4 + 1,25 + 0,5 + 2,75 + 12 + 3) = 70 \text{ см}^2$

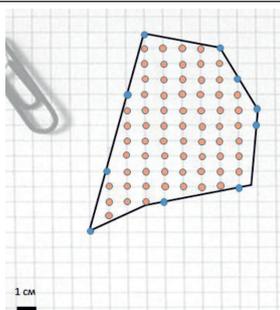


Рис. 14

17. или по формуле Пика [Рис.14]:

$$\begin{aligned} B &= 66 \\ \Gamma &= 10 \\ S &= B + \Gamma/2 - 1 \\ S &= 66 + 10/2 - 1 \\ S &= 70 \text{ см}^2 \end{aligned}$$

**Вывод:** площадь невыпуклого многоугольника, вычисленной по формуле Пика равна площади фигуры, вычисленной по формулам планиметрии.

**Вывод:** Рассматривая задачи на нахождение площадей многоугольников, изображенных на клетчатой бумаге, по формулам геометрии и по формуле Пика и сравнивая результаты, можно сделать вывод – площадь фигуры, вычисленной по формуле Пика равна площади фигуры, вычисленной по формуле планиметрии.

Итак, моя гипотеза оказалась верной.

*В задачах о фигурах на клетчатой бумаге узел – это угол клеточки.*

*Исследование № 2: Результаты эксперимента, проведенного в классе*

В процессе исследования я со своим учителем математики Натальей Алексеевной провела на факультативе эксперимент, для этого:

1. Выдала карточки с задачами с ЕГЭ [Рис. 15]

2. Поставила перед ними проблему: «Как вычислить площадь данных многоугольников»

3. Все предложенные решения были достроить до прямоугольника и найти площадь фигуры, используя вычитание из площади прямоугольника площади прямоугольных треугольников.

4. Далее решили задачу №1, используя предложенный способ.

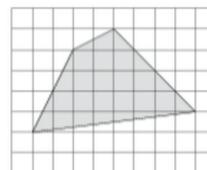
5. На мой вопрос: «Существует ли формула, по которой можно сразу найти площадь данного многоугольника?», ответ был отрицательным

6. Я рассказала им о формуле Пика, а после этого предложила решить эти же задания любым удобным для них способом.

Математика. 11 класс. Вариант МА10110 (без логарифмов)

3

**3** На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображен четырехугольник. Найдите его площадь. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

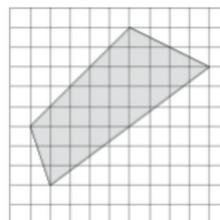


Ответ: \_\_\_\_\_.

Математика. 11 класс. Вариант МА10109 (без логарифмов)

3

**3** На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображен четырехугольник. Найдите его площадь. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: \_\_\_\_\_.

Рис. 15

7. До этого никто из них даже и не слышал о такой уникальной формуле. Но как не странно все без исключения попытались решить предложенные им задания с помощью формулы Пика. Но конечно не всем это удалось.

В эксперименте приняли участие 24 человека. Я проанализировала решение каждого участника и сделала табл. 1 с результатами.

Таблица 1

Результаты анкетирования участников эксперимента

Справились удачно с заданием, используя формулу Пика	С первого раза были не внимательны, поэтому ответы не сошлись, но ход решения был правильным	Не серьезно подошли к заданию, и во время объяснения вписали правильные ответы.
14 человек	7 человек	3 человека

**Вывод:** эксперимент, который я провела в своем классе, показал, что моим одноклассникам понравился альтернативный способ нахождения площади многоугольника.

*Исследование № 3: Результаты практического эксперимента, по нахождению площади фигуры с использованием квадратной решетки*

1. Для достоверности эксперимента я решила посчитать площади двумя способами формулой Пика и формулами планиметрии более сложные фигуры. Для начала я построила клетчатую решетку [Рис. 16] в приложении Excel, размером клетки 1 см×1 см.

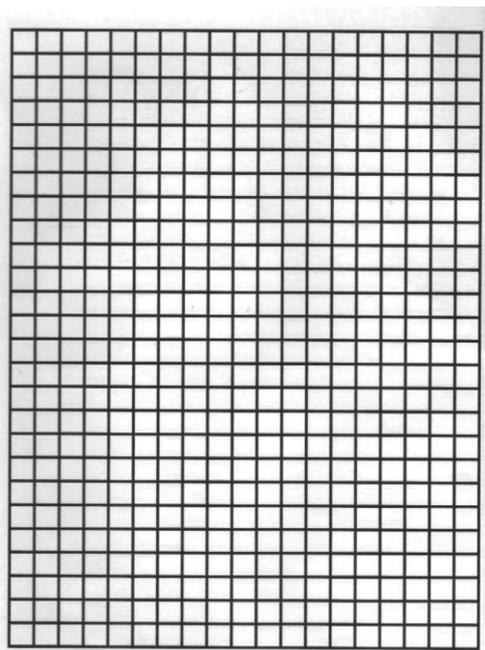


Рис. 16

2. Я построила 3 разные фигуры: многоугольник, ель и амеба, представленные на рисунках 17 – 19:

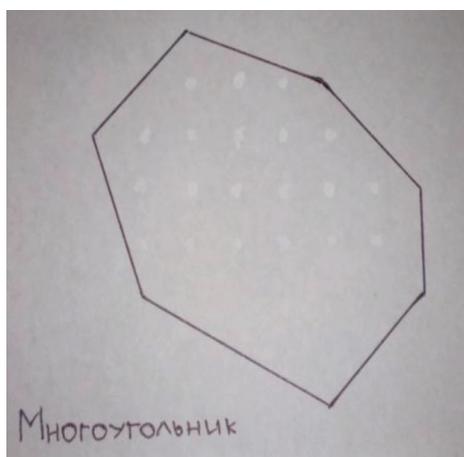


Рис. 17

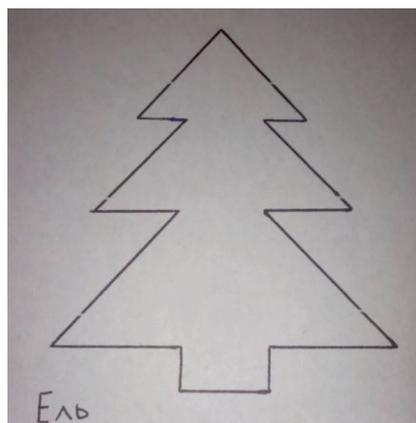


Рис. 18

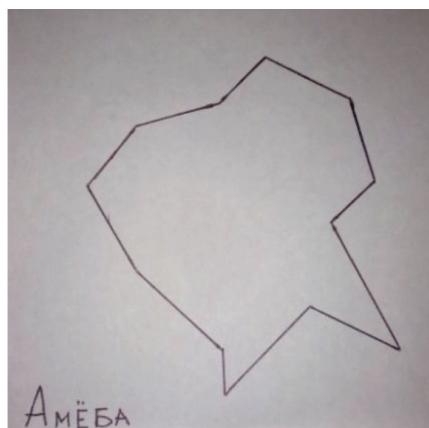


Рис. 19

3. Затем я методом наложения этих фигур на решетку вычислила площадь по формуле Пика и получила следующие результаты, они представлены на рисунках 20 – 22:

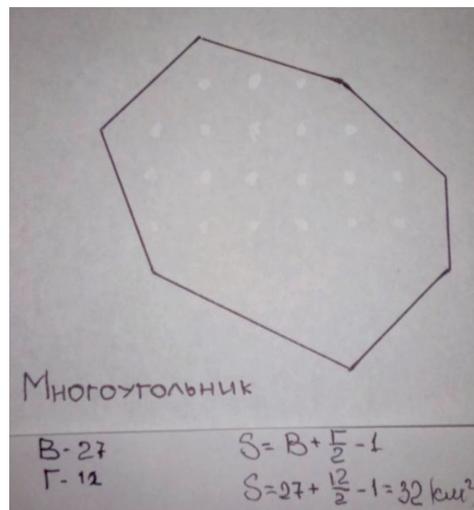


Рис. 20

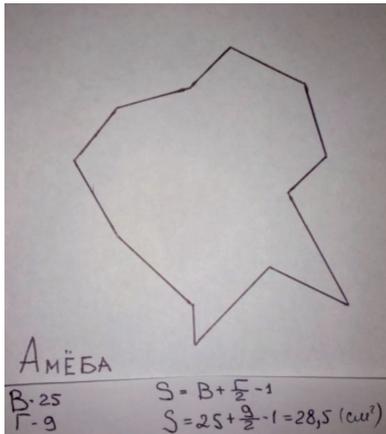


Рис. 21

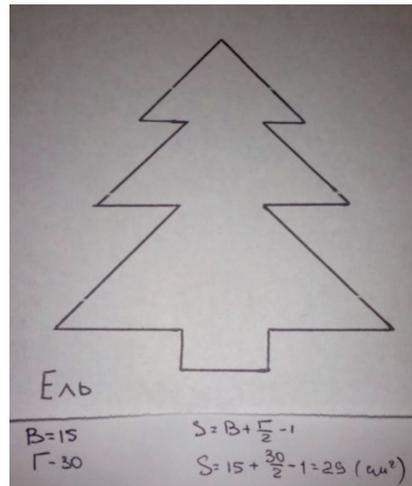


Рис. 22

4. Затем, так же методом наложения я посчитала площади этих фигур с помощью формул планиметрии, и вот какие результаты у меня получились, они представлены на рисунках 23 – 25:

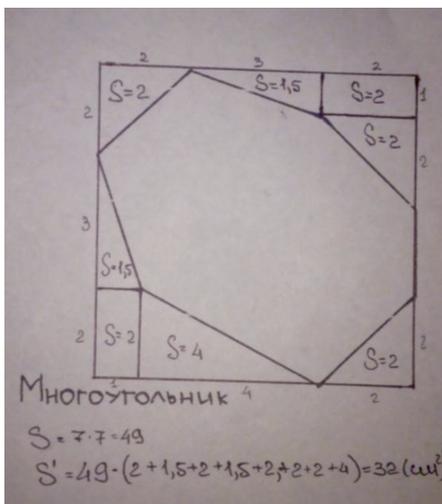


Рис. 23

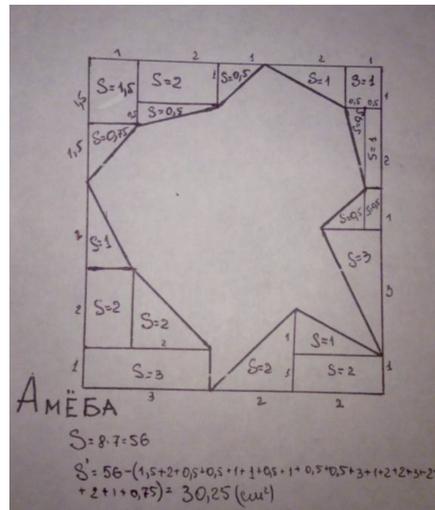


Рис. 24

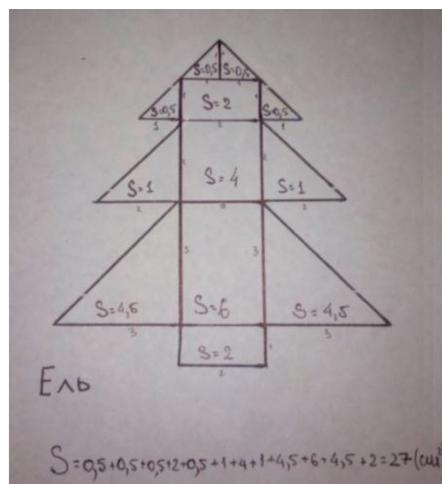


Рис. 25

После всех моих вычислений, к моему разочарованию у меня получились одинаковые результаты площадей только у многоугольника, а площади ели и амебы получились совершенно разными.

**Вывод:** формулой Пика пользоваться можно, но нет гарантий, что ответ всегда получится правильным. Я считаю, что ею можно пользоваться только при нахождении площадей многоугольников, потому что только при решении задач совпали значения.

### Заключение

В результате проделанной мной работой, я добилась реализации поставленной перед собой цели. Выяснила, что формула Пика уникальнейшая формула для нахождения площадей различных фигур построенных на клетчатой решетке. Доказала, что не стоит во всех случаях доверять только этой формуле, все-таки нужно знать все формулы планиметрии так и дополнительные приемы для нахождения площади прямоугольника, включая формулу Пика, в качестве проверочной формулы. Так как при моих вычислениях более сложных фигур, чем многоугольник, получались разные результаты при нахождении площади двумя способами.

Используя найденную мною информацию, я полностью всю ее обработала, выявив главную мысль и составив по ней различные таблицы и схемы, а так же научилась работать с научным материалом.

Научилась находить площади фигур, построенных на клетчатой решетке, различными способами, как формулой Пика, так и формулами планиметрии.

Моя гипотеза о том, что *Площадь фигуры, вычисленной по формуле Пика равна площади фигуры, вычисленной по формуле планиметрии*, подтвердилась.

На протяжении всего проекта я использовала различную информацию, которую находила в интернете, в книгах различных авторов, например: Вавилов В.В., Устинов А.В. и многих других. А так же посетила библиотеку и нашла немного информации, которая была очень интересной.

За время работы над своим проектом, я раньше, чем мои одноклассники научилась находить площади фигур различными способами. Я считаю, что в будущем мне это поможет при сдаче ОГЭ и ЕГЭ по математике.

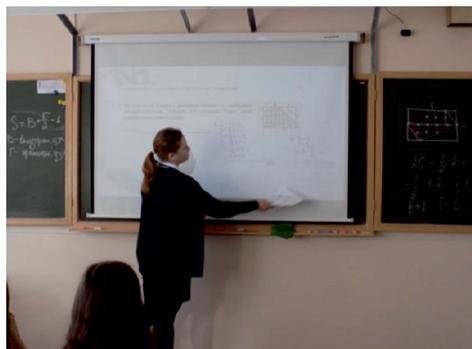
Когда я только начала делать свой проект, я не умела многого, например:

- находить площадь многоугольника, для площади которого нет формулы, строить таблицы 1x1 в приложение Excel,
- делать выводы из огромного количества информации,

- создавать сводные таблицы после проделанных мною измерений и др.

В конце этого нелегкого пути я могу смело сказать, что я научилась все это делать. Для меня работа над проектом это было очень увлекательное путешествие под руководством Комаровой Натальи Алексеевы в некий неизведанный мною прежде мир математики, с множеством непонятного и порой даже пугающего. Но в конце моего нелегкого путешествия я могу с точностью сказать, что в жизни мне это еще пригодится!

Приложение 1



15.01.2018 г. Занятие в 9 «Б» классе

### Список литературы

1. Л.В. Горина, г. Михайловск, Свердловская область, № 3 (27) март 2013 журнал Математика. Всё для учителя! «Одна за всех ... формула Пика» материалы для самообразования учащихся
2. <https://math-ege.sdangia.ru/test?theme=190>