ОТ НЕСОИЗМЕРИМЫХ ОТРЕЗКОВ ДО СПИРАЛЕЙ

Перфильева Н.С.

Кяхтинский район, МБОУ «Усть-Кяхтинская СОШ», 10 класс

Руководитель: Лодомпилова В.Г., Кяхтинский район, МБОУ «Усть-Кяхтинская СОШ», учитель математики

С расширением понятия числа возникла необходимость построения отрезков, длина которых выражена иррациональным числом. В школьном курсе приведены примеры построения отрезка, длина которого равна: √2 (Ю. Н. Макарычева «Алгебра – 8 класс»; √5 (А. Г. Мордковича «Алгебра 8») - (см. прил. 2) не более. Способ построения других «иррациональных» отрезков не был описан ни в учебнике алгебры, ни в учебнике геометрии.

Цель работы: Построение иррациональных отрезков, построение золотой спирали

Проблема: нахождение √3, √7, √11…

Литература по истории математики информирует о том, что именно эта проблема привела к кризису в математике, пифагорейцы обнаружили, что сторона квадрата и его диагональ несоизмеримы, так как их знания ограничивались целыми и дробными числами, что способствовало возникновению геометрической алгебры.

Этапы работы

1. Подготовительный: изучение математической литературы, работ художника А.Ф. Панкина.
2. Экспериментальный:

2.1 нахождение длины гипотенузы путем исследования комбинаций длин катетов от 1 до 10,

2.2 нахождение длины гипотенузы путем исследования комбинаций длин катетов √1, √2,√3.. и катета равного 1 измерения.

3. Практическая работа:

3.1 Изображение иррациональных чисел числовой прямой,

3.2 Построение последовательно прямоугольных треугольников, отображенных в таблице 2,

3.3 Построение золотого прямоугольника,

3.4 Построение золотой спирали.

4. Математическая обработка данных, презентация «От несоизмеримых отрезков до спиралей»
5. Информационный: выступление перед одноклассниками, НПК.

Методы исследования: абстрагирование, анализ, сравнение, моделирование, изучение первичной информации, сбор фактов, сопоставление, синтез, прогнозирование, измерение, обработка данных, эксперимент.

Несоизмеримые отрезки

Идею представления о несоизмеримых отрезках дает рисунок из «Книги для внеклассного чтения по математике» А.А. Колосова (см. прил. 1), где ученик всеми силами пытается «уложить» диагональ квадрата на координатную ось, в которой за единицу измерения принята длина стороны квадрата. Усилия ученика безрезультатны, поскольку упрямая диагональ никак не хочет измеряться таким образом. Она предпочитает выражать свою длину не десятичной дробью при данной единице, а особым числом √2.

Наиболее известным геометрическим открытием Пифагора считается открытие

несоизмеримых отрезков, то есть, обнаружение таких отрезков, отношение которых не может быть выражено с помощью отношения целых чисел. Считается, что это открытие они сделали при изучении отношения диагонали к стороне квадрата. Пифагорейцы обнаружили, что отношение диагонали к стороне квадрата не выражается в виде отношения двух натуральных чисел, а других чисел древние греки не знали.

Пифагорейцы знали только положительные целые и дробные числа. Следуя своей философской установке, они, по сути дела, считали, что каждая вещь может быть охарактеризована положительным целым или дробным числом, которое “выражает сущность” этой вещи. На деле это означало, что геометрия строилась на базе арифметики. Открытие несоизмеримости опрокидывало всю философскую систему пифагорейцев, поскольку они были убеждены, что «элементы чисел суть элементы всего существующего и что все небо есть гармония и число» (Аристотель). Чтобы выйти из затруднительного положения, пифагорейцы стали представлять величины не арифметически – числами, а геометрически – отрезками. Так возникла геометрическая алгебра. Открытие несоизмеримых отрезков, которое привело к открытию иррациональных чисел, стало поворотным этапом в развитии математики.

Факт существования несоизмеримых отрезков, тем не менее, не тормозил развитие геометрии в древней Греции. Греки разработали теорию отношения отрезков, которая учитывала возможность их несоизмеримости. Они умели сравнивать такие соотношения по величине, выполнять над ними арифметические действия в чисто геометрической форме, иначе говоря, пользоваться такими соотношениями как числами.

Древнегреческие математики стали представлять целые числа и любые величины, соизмеримые и несоизмеримые, **геометрически**, с помощью отрезков, прямоугольников и других фигур. Отсюда у них появились такие названия, как:

– «плоские числа» для чисел вроде 6=2*3, 14=7*2, являющихся произведениями двух сомножителей и выражающих площадь прямоугольника, построенного на соответствующей паре отрезков;

– «квадратные числа»: 4(=2*2), 81(=9*9) и т. д. Это название употребляется и поныне;

– «телесные числа»: 24(=2*3*4), 210(=5*6*7) и т. д., являющие произведениями трех чисел и изображаемые с помощью параллелепипедов;

– «кубические числа»: 8(=2*2*2), 125(=5*5*5).

Иррациональные числа

В Европе существование геометрических несоизмеримых величин в средние века не оспаривалось, но для многих иррациональные числа были лишь символами, лишенными точно определенного содержания, поэтому их называли «глухими», «недействительными», «фиктивными» и т.д.

Только после появления геометрии Декарта (1637 г) началось применение иррациональных, как, впрочем, и отрицательных чисел. Идеи Декарта привели к обобщению понятия о числе. Между точками прямой и числами было определено взаимно однозначное соответствие. В математику была введена переменная величина.

В начале XVIII столетия существовало три понятия иррационального числа:

– иррациональное число рассматривали как корень n-ой степени из целого или дробного числа, когда результат извлечения корня нельзя выразить «точно» целым или дробным числом;

– иррациональное число трактовали как границу, к которой его рациональные приближения могут подойти как угодно близко;

– число рассматривали как отношение одной величины к другой величине того же самого рода, взятой за единицу; когда величина несоизмерима с единицей, число называли иррациональным.

Позднее Эйлер, Ламберт показали, что иррациональные числа можно представить бесконечными непериодическими десятичными дробями (например, π = =3,141592…).

Свое дальнейшее развитие теория иррациональных чисел получила во второй половине XIX века в трудах Дедекинда, Кантора и Вейерштрасе в связи с потребностями математического анализа.

Нахождение длины иррационального отрезка

1. Нахождение гипотенузы прямоугольного треугольника, где a, b э N

В учебнике «Алгебра 8 класса» Мордкович А.Г. §12 «Множество действительных чисел» обращают внимание учащихся на то, что с умением построения отрезка √5, можно говорить о числовой прямой.

Согласно тексту учебника, применяя теорему Пифагора можно найти отрезок √5, равный длине гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами 2 и 1.

По аналогии рассмотрим прямоугольные треугольники с катетами 3 и 1; 4 и 1; 5 и 1; 6 и 1; 7 и 1 и т.д. оформим виде таблицы 1.

$$\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1^2}, \sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}\ .$$

Таблица 1

Длина гипотенузы в зависимости от длин катетов, где a, b э N

Катеты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	√2	√5	√10	√17	√26	√37	√50	√65	√82	√101
2	√5	√8	√13	√20	√29	√40	√53	√68	√85	√104
3	√10	√13	√18	√25	√34	√45	√58	√73	√90	√109
4	√17	√20	√25	√32	√41	√52	√65	√80	√97	√116
5	√26	√29	√34	√41	√50	√61	√74	√89	√106	√125
6	√37	√40	√45	√52	√61	√72	√85	√100	√117	√136

7	√50	√53	√58	√65	√74	√85	√98	√113	√130	√149
8	√65	√68	√73	√80	√89	√100	√113	√128	√145	√164
9	√82	√85	√90	√97	√106	√117	√130	√145	√162	√181
10	√101	√104	√109	√116	√125	√136	√149	√164	√181	√200

Вывод: в таблице не все числа, нет √3, √7, √11, …

Возникла проблема построения √3, √7, √11, √15, √19…

Нахождение гипотенузы прямоугольного треугольника, где один из катетов иррациональное число.

Методом подбора √7 можно построить, как

$$a^2 = c^2 - b^2 a = \sqrt{16-9} = \sqrt{4^2-3^2}.$$

У прямоугольного треугольника катеты √7 и 3, гипотенуза 4.

Аналогично:

$$\sqrt{11} = \sqrt{36-25},\ \sqrt{15} = \sqrt{64-49}$$

Прослеживается некоторая закономерность в нахождении чисел, которых нет в таблице №1.

Таблица 2

Нахождение катета, при известной четной гипотенузе и катету, которая на 1 меньше гипотенузы

Гипотенуза Катет	2	4	6	8	10
1	√3	15	35	63	99
3		√5			
5			√11		
7				√15	
9					√19

Вывод: один из катетов представляет иррациональный отрезок

По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+\sqrt{2}^2} = \sqrt{3}$

Таблица 3

Длина гипотенузы в зависимости от длин катетов

Катеты	1	√2	√3	2	√5	√6	√7	√8	√9=3	√10	√11	√13	√14	√15	4
1	√2	√3	√4=2	√5	√6	√7	√8	√9=3	√10	√11	√12	√14	√15	4	√17

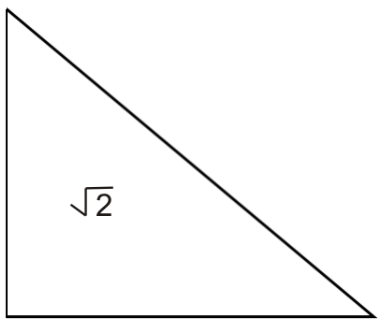


Рис. 1

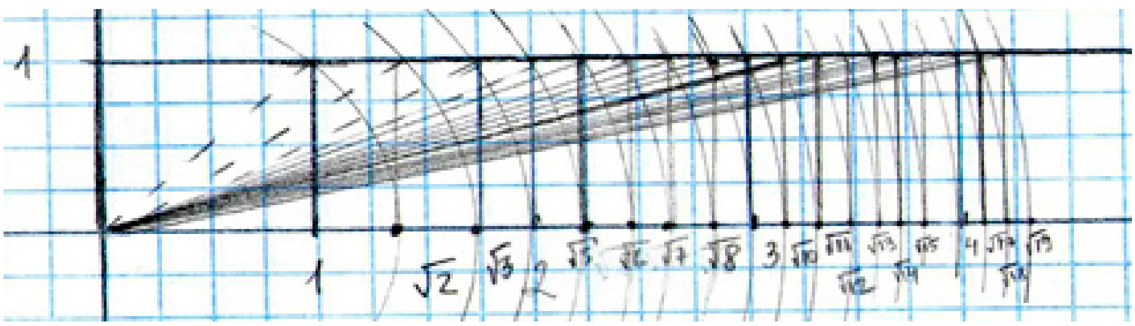


Рис. 2

Построение отрезков, равных √a, может заключаться в построении высоты, проведенной из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, проекции катетов на гипотенузу которого равны a и 1.

Изображение иррациональных чисел числовой прямой

В книге А. А. Колосова говорится «Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах» на странице 65 «…Множество рациональных чисел не покрывает всей числовой оси... Концы отрезков √2, √3, √4, √5 займут места на числовой оси, свободные от всяких иных точек, изображающих рациональные числа…Вдумайтесь, как он построен.» На рис 2 выполнено геометрическое построение.

Данное изображение поражает своей простотой, ясностью. Цель достигнута.

А.Ф. Панкин «Треугольник Фибоначчи»

Элемент, похожий на рис 2. есть в картине Александра Федоровича Панкина «Запуск треугольника Фибоначчи на Луну. 2004 г (см. приложение 1).

Александр Федорович Панкин – художник. Он широко в своих полотнах реализует различные математические объекты (так называемая – метаабстракция). Особую любовь Александр Федорович питает к числам Фибоначчи

В научно-практическом журнале «Математика для школьников» №2 2010 года И.Ф. Акулич в статье «На вернисаже как-то раз…» проводит занимательные рассуждения о числах Фибоначчи, теорему о треугольнике Панкина. Цитирование теоремы, статьи не входит в задачу данной работы, только сканирование репродукции картин А.П. Панкина с форзаца журнала. (см. прил. 2)

Эксперимент

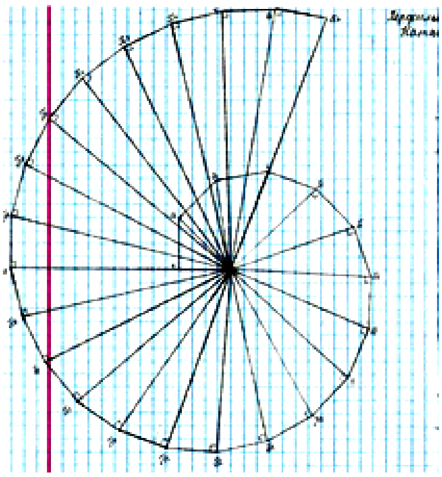
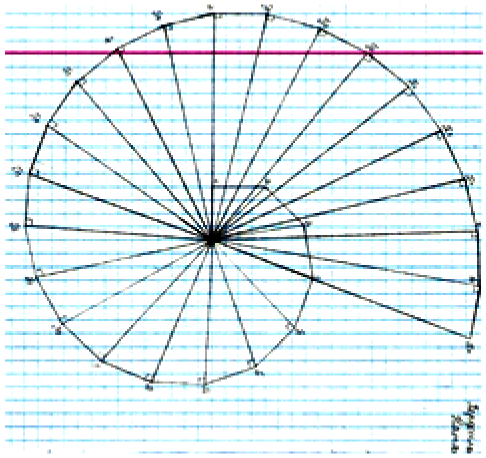


Рис. 3а

1. В духе А.Ф. Панкина усложним задачу построим числовой ряд таблицы 2 в виде треугольников (рис. 3а).
2. Развернем свой рисунок на 90°
3. Получилась спираль, похожая на раковину улитки (рис. 3б)



Возникает желание о построении других спиралей. Самым известным считается золотая спираль.

Золотая спираль

Спирали – плоские кривые линии, многократно обходящие одну из точек на плоскости, называемую полюсом спирали. Наиболее встречающиеся спирали: спираль Архимеда, квадратичная спираль, логарифмическая спираль, спираль Корню.

Построение золотой спирали, основывается на золотом прямоугольнике, который в свою очередь основывается на числах Фибボначи. Заметьте, опять числа Фиббоначи.

Последовательность Фиббоначи возникла из задачи, описывающей последовательность размножения кроликов.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 и т.д.

Строим квадрат 1X1, затем еще один квадрат 1X1 слева от первого, потом квадрат 2X2 снизу, справа от него квадрат 3X3 и т.д.

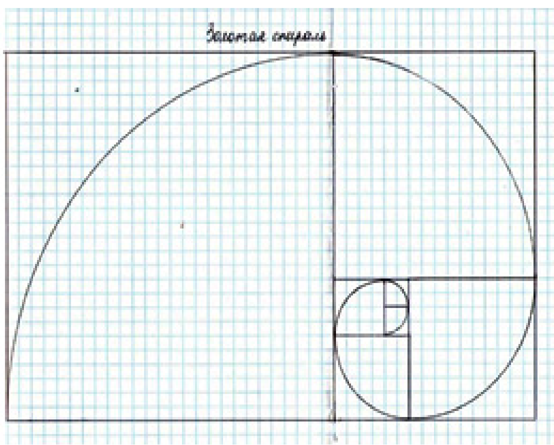


Рис 4.

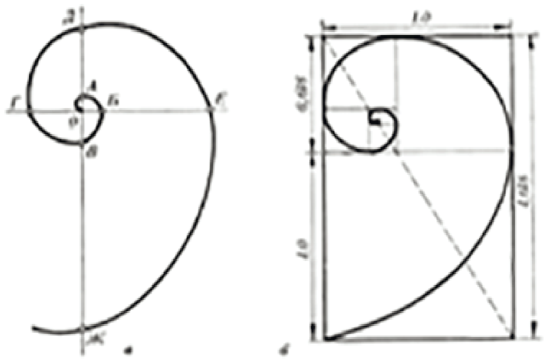


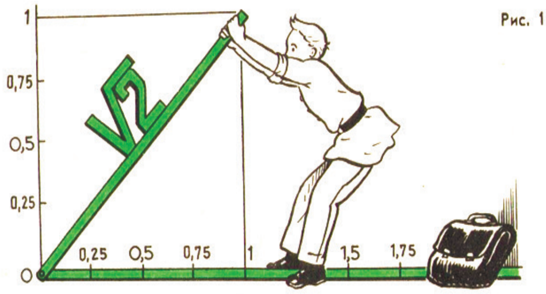
Рис 5.

На рисунке 5 рассматривается соотношения сторон, т.е. золотое сечение.

Золотое сечение может быть рассмотрено в перспективе. Цель и задачи данной работы не предусматривают рассмотрение теории золотого сечения.

Приложение1

Рисунок из «Книги для внеклассного чтения по математике» Колосова А.А.



Приложение 2

Учебник «Алгебра 8 класс» Мордкович А.Г.

обратите внимание

пользовались начиная с 5-го класса. Но, оказывается, в ваших знаниях был вполне оправданный пробел: не для любой точки координатной прямой вы сумели бы найти координату — просто учитель оберегал вас от такой неприятности.

Рассмотрим пример. Дана координатная прямая, на ее единичном отрезке, как на катете, построен прямоугольный треугольник, второй катет которого равен 2 (рис. 5). Гипотенуза OB треугольника отложена на координатной прямой от точки O вправо, получилась точка D. Чему равна

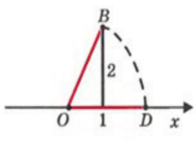


Рис. 5

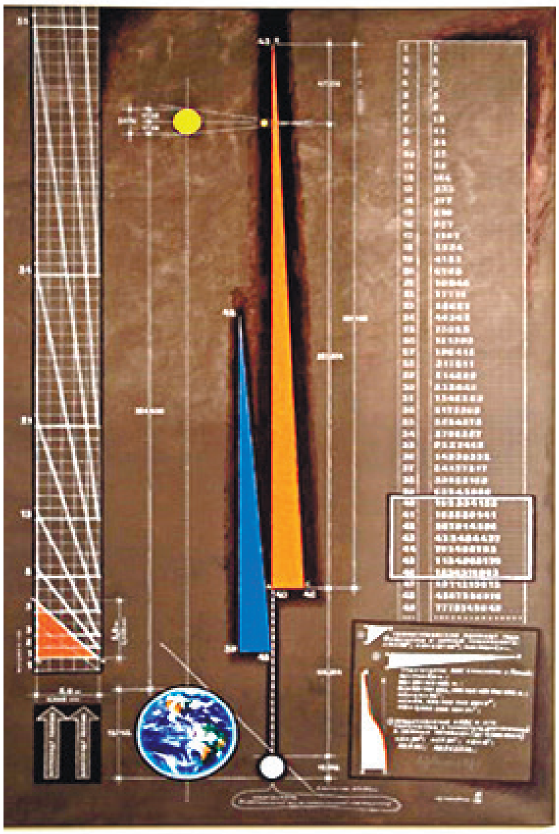
53

2. ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$. СВОЙСТВА КВАДРАТНОГО КОРНЯ

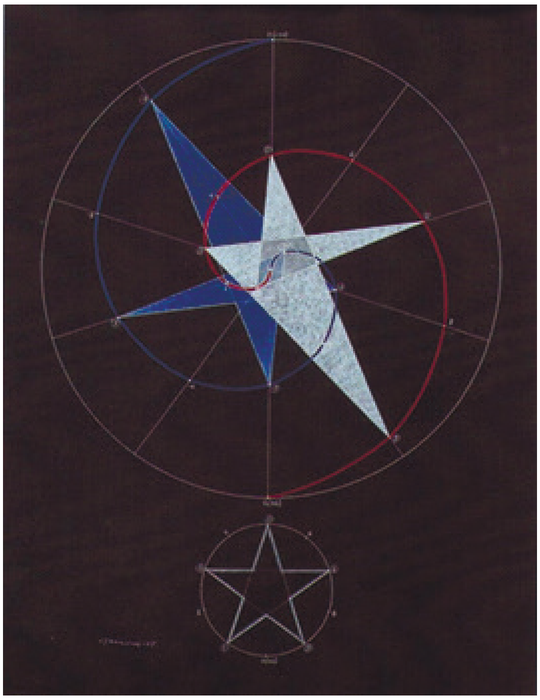
координата точки D? Она равна длине гипотенузы, т. е. $\sqrt{5}$. Это число, как мы теперь знаем, не целое и не дробь. Значит, ни в 5-м, ни в 6-м, ни в 7-м классе координату точки D вы найти бы не смогли. Потому мы до сих пор и говорили «координатная прямая», а не «числовая прямая».

Приложение 3

Панкин А.Ф. «Запуск треугольника Фибоначчи на Луну. 2004 г

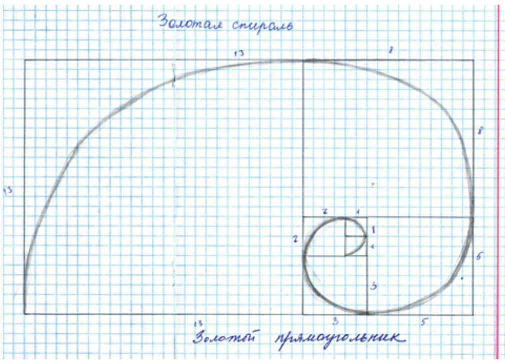


Приложение 4



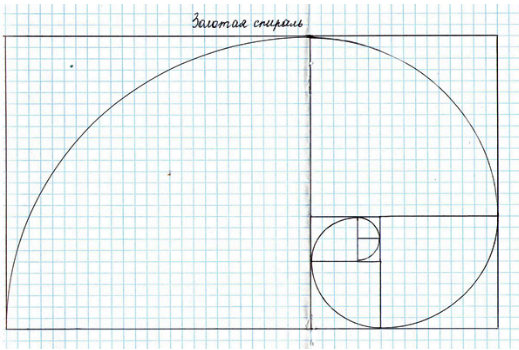
Приложение 5

Золотой прямоугольник



Приложение 6

Золотая спираль



Заключение

Исследовательская работа тем интересна, что в ходе ее выполнения не знаешь, куда выведет кривая исследований. В начале хотелось назвать ее «От несоизмеримых отрезков до Луны» заняться подробным изучением треугольников Панкина. Именно творчество Панкина А.Ф. его полотна «Запуск треугольника Фибоначчи на Луну» и «Запуск треугольника Фибоначчи на Солнце» позволили мне перейти к спиралям. В будущем году я продолжу исследования, обратив внимание на числа Фибоначчи.

Я научилась анализировать, делать выводы, ставить вопросы «А что дальше?», «Почему...?», процессу абстрагирования (как Панкин А.Ф.).

На уроках геометрии

В рамках поставленной цели и задач моя работа завершена.

Список литературы

1. Акулич А.Ф. «На вернисаже как-то раз…» стр56 журнал «Математика для школьников» №2 2010 г.

2. Виноградов И.М. Аналитическая геометрия.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 176 с.

3. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые.М.1978 г.Из-во «Наука»158 стр.

4. Виноградов И.М. Математическая энциклопедия. 5 – томов, том 5 (стр 142)

5. Воробьев Н.Н. Числа Фиббоначи. М.1978 г. И «Наука» 144 стр.

6. Колосова А.А «Книги для внеклассного чтения по математике» М. 1963 г.

7. Маркушевич А.И. Замечательные кривые. М. 1978 г.Из-во «Наука» 48 стр.

8. Маркушевич А. И. Замечательные кривые, Популярные лекции по математике, выпуск 4, Наука 1978.

9. Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С. Математическая шкатулка: Пособие для учащихся. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1984. – 160 с.

10. Савин А.П. Энциклопедический словарь юного математикаМ. «Педагогика»1989 г. 350 стр.