

## ТАЙНЫ ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

Висконтас А.О., Смирнов Н.А.

КОУ ВО «Горожанский казачий кадетский корпус», 8 Б класс

Научный руководитель: Двойневская Н.А., учитель математики ИКК,  
КОУ ВО «Горожанский казачий кадетский корпус»

*Высшее назначение математики состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает.*

Винер Н.

Человек всю жизнь стремится к знаниям, пытается изучить окружающий его мир. И в процессе наблюдений у него возникают вопросы, на которые требуется найти ответы. Ответы находятся, но появляются новые вопросы. В археологических находках, в следах цивилизации, отдаленных друг от друга во времени и в пространстве, встречается один и тот же элемент – узор в виде спирали. Некоторые считают его символом солнца и связывают с легендарной Атлантидой, но истинное его значение неизвестно.

Что общего между формами галактики и атмосферного циклона, расположением листьев на стебле и семян в подсолнухе? Эти закономерности сводятся к так называемой «золотой» спирали, удивительной последовательности Фибоначчи, открытой великим итальянским математиком XIII века.

### История возникновения чисел Фибоначчи

Впервые о том, что такое числа Фибоначчи, я услышал от учителя математики. Но, кроме того, каким образом складывается последовательность этих чисел, я не знал. Вот чем на самом деле знаменита эта последовательность, каким образом она влияет на человека, я и хочу вам рассказать.

О Леонардо Фибоначчи известно немного. Нет даже точной даты его рождения. Известно, что он родился в 1170 году в семье купца, в городе Пизе в Италии. Отец Фибоначчи часто бывал в Алжире по торговым делам, и Леонардо изучал там математику у арабских учителей. Впоследствии он написал несколько математических трудов, наиболее известным из которых является «Книга об абаке», которая содержит почти все арифметические и алгебраические сведения того времени.

Числа Фибоначчи – это последовательность чисел, обладающая рядом свойств. Эту числовую последовательность Фибоначчи открыл случайно, когда пытался в 1202 году решить практическую задачу о кроликах. «Некто поместил пару кроли-

ков в некоем месте, огороженном со всех сторон со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рожают кролики со второго месяца после своего рождения». При решении задачи он учел, что каждая пара кроликов порождает на протяжении жизни еще две пары, а затем погибает.

Так появилась последовательность чисел: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... В этой последовательности каждое следующее число равно сумме двух предыдущих. Её назвали последовательностью Фибоначчи.

### Математические свойства последовательности

Мне захотелось исследовать эту последовательность, и я выявил некоторые её свойства. Эта закономерность имеет большое значение. Последовательность все медленнее приближается к некоему постоянному отношению, равному примерно 1,618, а отношение любого числа к последующему примерно равно 0,618.

Можно заметить ряд любопытных свойств чисел Фибоначчи: два соседних числа взаимно просты; каждое третье число четно; каждое пятнадцатое оканчивается нулем; каждое четвертое кратно трем. Если выбрать любые 10 соседних чисел из последовательности Фибоначчи и сложить их вместе, всегда получится число, кратное 11. Но это еще не все. Каждая сумма равна числу 11, умноженному на седьмой член взятой последовательности. А вот еще одна любопытная особенность. Для любого  $n$  сумма первых  $n$  членов последовательности всегда будет равна разности  $(n + 2)$  – го и первого члена последовательности. Этот факт можно выразить формулой:  $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$ . Теперь в нашем распоряжении имеется следующий трюк: чтобы найти сумму всех членов последовательности между двумя данными членами, достаточно найти разность соответствующих  $(n + 2)$ -х членов. Например,  $a_{26} + \dots + a_{40} = a_{42} - a_{27}$ .

Теперь поищем связь между Фибоначчи, Пифагором и «золотым сечением». Самым известным свидетельством математиче-

ского гения человечества является теорема Пифагора: в любом прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов:  $c^2 = b^2 + a^2$ .

С геометрической точки зрения мы можем рассматривать все стороны прямоугольного треугольника, как стороны трех построенных на них квадратов. Теорема Пифагора говорит о том, что общая площадь квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.

Если длины сторон прямоугольного треугольника являются целыми числами, то они образуют группу из трех чисел, называемых пифагоровыми тройками. С помощью последовательности Фибоначчи можно отыскать такие тройки.

Возьмем любые четыре последовательных числа из последовательности, например, 2, 3, 5 и 8, и построим еще три числа следующим образом:

1) произведение двух крайних чисел:

$$2 \cdot 8 = 16;$$

2) удвоенное произведение двух чисел в середине:

$$2 \cdot (3 \cdot 5) = 30;$$

3) сумма квадратов двух средних чисел:

$$3^2 + 5^2 = 34;$$

$$34^2 = 30^2 + 16^2.$$

Этот метод работает для любых четырех последовательных чисел Фибоначчи.

Предсказуемым образом ведут себя любые три последовательных числа ряда Фибоначчи. Если перемножить из них два крайних и результат сравнить с квадратом среднего числа, то результат всегда будет отличаться на единицу. Например, для чисел 5, 8 и 13 получим:  $5 \cdot 13 = 8^2 + 1$ . Если рассмотреть это свойство с точки зрения геометрии, можно заметить нечто странное. Разделим квадрат размером  $8 \times 8$  (всего 64 маленьких квадратика) на четыре части, длины сторон которых равны числам Фибоначчи. Теперь из этих частей построим прямоугольник размером  $5 \times 13$ . Его площадь составляют 65 маленьких квадратиков. Откуда же берется дополнительный квадрат? Все дело в том, что идеальный прямоугольник не образуется, а остаются крошечные зазоры, которые в сумме и дают эту дополнительную единицу площади.

Треугольник Паскаля также имеет связь с последовательностью Фибоначчи. Надо только написать строки треугольника Паскаля одну под другой, а затем складывать элементы по диагонали. Получится последовательность Фибоначчи.

Теперь рассмотрим «золотой» прямоугольник, одна сторона которого в 1,618 раз длиннее другой. На первый взгляд он может показаться нам обычным прямоугольником. Тем не менее, давайте сделаем простой эксперимент с двумя обыкновенными банковскими картами. Положим одну из них горизонтально, а другую вертикально так, чтобы их нижние стороны находились на одной линии. Если в горизонтальной карте провести диагональную линию и продлить ее, то увидим, что она пройдет в точности через правый верхний угол вертикальной карты – приятная неожиданность. Может быть, это случайность, а может, такие прямоугольники и другие геометрические формы, использующие «золотое сечение», особенно приятны глазу. Думал ли Леонардо да Винчи о золотом сечении, работа над своим шедевром? Это кажется маловероятным. Однако можно утверждать, что он придавал большое значение связи между эстетикой и математикой.

### Числа Фибоначчи в природе

Связь золотого сечения с красотой – вопрос не только человеческого восприятия. Похоже, сама природа выделила Ф особую роль. Если в «золотой» прямоугольник последовательно вписать квадраты, затем в каждом квадрате провести дугу, то получится элегантная кривая, которая называется логарифмической спиралью. Она вовсе не является математическим курьезом.

Наоборот, эта замечательная линия часто встречается в физическом мире: от раковины наутилуса до рукавов галактик, и в элегантной спирали лепестков распустившейся розы.

Связи между золотым сечением и числами Фибоначчи многочисленны и неожиданны. Рассмотрим цветок, внешне сильно отличающийся от розы, – подсолнечник с семенами. Первое, что мы видим, – семена расположены по спиралам двух видов: по часовой стрелке и против часовой стрелки. Если посчитаем спирали почасовой стрелки, то получим два, казалось бы, обычных числа: 21 и 34. Это не единственный пример, когда можно встретить числа Фибоначчи в структуре растений.

Природа даёт нам многочисленные примеры расположения однородных предметов, описываемых числами Фибоначчи. В разнообразных спиралевидных расположениях мелких частей растений обычно можно усмотреть два семейства спиралей. В одном из этих семейств спирали завиваются по часовой стрелке, а в другом – против. Числа спиралей одного и другого типов часто оказываются соседними числами

Фибоначчи. Так, взяв молодую сосновую веточку, легко заметить, что хвоинки образуют две спирали, идущие слева снизу вправо вверх. На многих шишках семена расположены в трёх спиралях, полого навивающихся на стержень шишки. Они же расположены в пяти спиралях, круто навивающихся в противоположном направлении. В крупных шишках удаётся наблюдать 5 и 8, и даже 8 и 13 спиралей. Хорошо заметны спирали Фибоначчи и на ананасе: обычно их бывает 8 и 13.

Отросток цикория делает сильный выброс в пространство, останавливается, выпускает листок, но уже короче первого, снова делает выброс в пространство, но уже меньшей силы, выпускает листок ещё меньшего размера и снова выброс. Импульсы его роста постепенно уменьшаются в пропорции «золотого» сечения. Чтобы оценить огромную роль чисел Фибоначчи, достаточно лишь взглянуть на красоту окружающей нас природы. Числа Фибоначчи можно найти в количестве ответвлений на стебле каждого растущего растения и в числе лепестков.

Пересчитаем лепестки некоторых цветов – ириса с его 3 лепестками, примулы с 5 лепестками, амброзии с 13 лепестками, нивяника с 34 лепестками, астры с 55 лепестками и т.д. Случайно ли это, или это закон природы? Посмотрите на стебли и цветы тысячелистника. Таким образом, суммарной последовательностью Фибоначчи можно легко трактовать закономерность проявлений «Золотых» чисел, встречаемых в природе. Эти законы действуют независимо от нашего сознания и желания принимать их или нет. Закономерности «золотой» симметрии проявляются в энергетических переходах элементарных частиц, в строении некоторых химических соединений, в планетарных и космических системах, в генных структурах живых организмов, в строении отдельных органов человека и тела в целом, а также проявляются в биоритмах и функционировании головного мозга и зрительного восприятия.

#### Числа Фибоначчи в архитектуре

«Золотое сечение» проявляется и во многих замечательных архитектурных творениях на протяжении всей истории человечества. Оказывается, еще древнегреческие и древнеегипетские математики знали эти коэффициенты задолго до Фибоначчи и называли их «золотым сечением». Принцип «золотого сечения» греки использовали при строительстве Парфенона, египтяне – Великой пирамиды в Гизе. Достижения в области строительной техники и разработки новых

материалов открыли новые возможности для архитекторов XX века. Американец Фрэнк Ллойд Райт был одним из главных сторонников органической архитектуры. Незадолго до смерти он спроектировал музей Соломона Гуггенхайма в Нью-Йорке, представляющий собой опрокинутую спираль, а интерьер музея напоминает раковину наутилуса.

Польско-израильский архитектор Цви Хекер также использовал спиральные конструкции в проекте школы имени Хайнца Галински в Берлине, построенной в 1995 году. Хекер начал с идеи подсолнечника с центральным кругом, откуда расходятся все архитектурные элементы. Здание представляет собой сочетание ортогональных и концентрических спиралей, символизируя взаимодействие ограниченных человеческих знаний и управляемого хаоса природы. Его архитектура имитирует растение, которое следует за движением Солнца, поэтому классные комнаты освещены в течение всего дня.

В Куинси-парке, расположенном в Кембридже, штат Массачусетс (США), «золотую» спираль можно встретить часто. Парк был спроектирован в 1997 году художником Дэвидом Филлипсом и находится недалеко от Математического института Клэя. Это заведение является известным центром математических исследований. В Куинси-парке можно прогуливаться среди «золотых» спиралей и металлических кривых, рельефов из двух раковин и скалы с символом квадратного корня. На табличке написана информация о «золотой» пропорции. Даже парковка для велосипедов использует символ Ф.

#### Числа Фибоначчи в психологии

В психологии отмечены переломные моменты, кризисы, перевороты, знаменующие на жизненном пути человека преобразование структуры и функций души. Если человек успешно преодолел эти кризисы, то становится способным решать задачи нового класса, о которых раньше даже не задумывался.

Наличие коренных изменений дает основание рассматривать время жизни в качестве решающего фактора развития духовных качеств. Ведь природа отмеряет нам время не щедро, «ни сколько будет, столько и будет», а ровно столько, чтобы процесс развития материализовался:

- в структурах тела;
- в чувствах, мышлении и психомоторике – пока они не приобретут гармонию, необходимую для возникновения и запуска механизма
- творчества;
- в структуре энергопотенциала человека.

Развитие тела нельзя остановить: ребенок становится взрослым человеком. С механизмом же творчества не так все просто. Его развитие можно остановить и изменить его направление.

Существует ли шанс догнать время? Безусловно. Но для этого нужно выполнить огромную работу над собой. То, что развивается свободно, естественным путем, не требует специальных усилий: ребенок свободно развивается и не замечает этой огромной работы, потому что процесс свободного развития создается без насилия над собой.

Как понимается смысл жизненного пути в обыденном сознании? Обыватель видит его так: у подножия – рождение, на вершине – расцвет сил, а потом – все идет под гору.

Мудрец же скажет: все намного сложнее. Восхождение он разделяет на этапы: детство, отрочество, юность... Почему так? Мало, кто способен ответить, хотя каждый уверен, что это замкнутые, целостные этапы жизни.

Чтобы выяснить, как развивается механизм творчества, В.В. Клименко воспользовался математикой, а именно законами чисел Фибоначчи и пропорцией «золотого сечения» – законами природы и жизни человека.

Числа Фибоначчи делят нашу жизнь на этапы по количеству прожитых лет: 0 – начало отсчета – ребенок родился. У него еще отсутствуют не только психомоторика, мышление, чувства, воображение, но и оперативный энергопотенциал. Он – начало новой жизни, новой гармонии;

- 1 – ребенок овладел ходьбой и осваивает ближайшее окружение;
- 2 – понимает речь и действует, пользуясь словесными указаниями;
- 3 – действует посредством слова, задает вопросы;
- 5 – «возраст грации» – гармония психомоторики, памяти, воображения и чувств, которые уже позволяют ребенку охватить мир во всей его целостности;
- 8 – на передний план выходят чувства. Им служит воображение, а мышление силами своей критичности направлено на поддержку внутренней и внешней гармонии жизни;
- 13 – начинает работать механизм таланта, направленный на превращение приобретенного в процессе наследования материала, развивая свой собственный талант;
- 21 – механизм творчества приближается к состоянию гармонии и делаются попытки выполнять талантливую работу;
- 34 – гармония мышления, чувств, воображения и психомоторики: рождается способность к гениальной работе;

● 55 – в этом возрасте, при условии сохраненной гармонии души и тела, человек готов стать творцом. И так далее...

Что же такое засечки «Чисел Фибоначчи»? Они могут быть сравнимы с плотинами на жизненном пути. Эти плотины ожидают каждого из нас. Прежде всего необходимо преодолеть каждую из них, а потом терпеливо поднимать свой уровень развития, пока в один прекрасный день она не развалится, открывая свободному течению путь к следующей.

Теперь, когда нам понятен смысл этих узловых точек возрастного развития, попробуем расшифровать, как все это происходит.

*В 1 год* ребенок овладевает ходьбой. До этого он познавал мир передней частью головы. Теперь же он познает мир руками – исключительная привилегия человека. Животное передвигается в пространстве, а он, познавая, овладевает пространством и осваивает территорию, на которой живет.

*2 года* – понимает слово и действует в соответствии с ним. Это значит, что:

ребенок усваивает минимальное количество слов – смыслов и образов действий;

● пока что не отделяет себя от окружающей среды и слит в целостность с окружающим;

● поэтому действует по чужому указанию. В этом возрасте он самый послушный и приятный для родителей. Из человека чувственного ребенок превращается в человека познающего.

*3 года* – действие при помощи собственного слова. Уже произошло отделение этого человека от окружающей среды – и он учится быть самостоятельно действующей личностью. Отсюда он:

● сознательно противостоит среде и родителям, воспитателям в детском саду и т.д.;

● осознает свой суверенитет и борется за самостоятельность;

● старается подчинить своей воле близких и хорошо знакомых людей.

Теперь для ребенка слово – это действие. С этого начинается действующий человек.

*5 лет* – «возраст грации». Он – олицетворение гармонии. Игры, танцы, ловкие движения – все насыщено гармонией, которой человек старается овладеть собственными силами. Гармоничная психомоторика содействует приведению к новому состоянию. Поэтому ребенок направлен на психомоторную активность и стремится к максимально активным действиям.

Материализация продуктов работы чувствительности осуществляется посредством:

● способности к отображению окружающей среды и себя как части этого мира



(мы слышим, видим, прикасаемся, нюхаем и т.д. – все органы чувств работают на этот процесс);

- способности к проектированию внешнего мира, в том числе и себя

- (создание второй природы, гипотез – сделать завтра то и другое, построить новую машину, решить проблему), силами критичности мышления, чувств и воображения;

- способности к созиданию второй, рукотворной природы, продуктов деятельности (реализация задуманного, конкретные умственные или психомоторные действия с конкретными предметами и процессами).

После 5 лет механизм воображения выходит вперед и начинает доминировать над остальными. Ребенок выполняет гигантскую работу, создавая фантастические образы, и живет в мире сказок и мифов. Гипертрофированность воображения ребенка вызывает у взрослых удивление, потому что воображение никак не соответствует действительности.

*8 лет* – на передний план выходят чувства и возникают собственные мерки чувств (познавательных, нравственных, эстетических), когда ребенок безошибочно:

- оценивает известное и неизвестное;
- отличает моральное от аморального, нравственное от безнравственного;

- прекрасное от того, что угрожает жизни, гармонию от хаоса.

*13 лет* – начинает работать механизм творчества. Но это не значит, что он работает на полную мощность. На первый план выходит один из элементов механизма, а все остальные содействуют его работе. Если и в этом возрастном периоде развития сохраняется гармония, которая почти все время перестраивает свою структуру, то отрок безболезненно доберется до следующей плотины, незаметно для себя преодолеет ее и будет жить в возрасте революционера. В возрасте революционера отрок должен сделать новый шаг вперед: отделиться от ближайшего социума и жить в нем гармоничной жизнью и деятельностью. Не каждый может решить эту задачу, возникающую перед каждым из нас.

*21 год.* Если революционер успешно преодолел первую гармоничную вершину жизни, то его механизм таланта способен выполнять талантливую работу. Чувства (познавательные, моральные или эстетические) иногда затмевают мышление, но в общем все элементы работают слаженно: чувства открыты миру, а логическое мышление способно с этой вершины называть и находить меры вещей.

Механизм творчества, развиваясь нормально, достигает состояния, позволяю-

щего получать определенные плоды. Он начинает работать. В этом возрасте вперед выходит механизм чувств. По мере того, как воображение и его продукты оцениваются чувствами и мышлением, между ними возникает антагонизм. Побеждают чувства. Эта способность постепенно набирает мощностя, и отрок начинает ею пользоваться.

*34 года* – уравновешенность и гармоничность, продуктивная действенность таланта. Гармония мышления, чувств и воображения, психомоторики, которая пополняется оптимальным энергопотенциалом, и механизм в целом – рождается возможность исполнять гениальную работу.

*55 лет* – человек может стать творцом. Третья гармоничная вершина жизни: мышление подчиняет себе силу чувств.

Числа Фибоначчи называют этапы развития человека. Пройдет ли человек этот путь без остановок, зависит от родителей и учителей, образовательной системы, а дальше – от него самого и от того, как человек будет познавать и преодолевать самого себя.

На жизненном пути человек открывает 7 предметов отношений:

- От дня рождения до 2-х лет – открытие физического и предметного мира ближайшего окружения.

- От 2-х до 3-х лет – открытие себя: «Я – Сам».

- От 3-х до 5-ти лет – речь, действенный мир слов, гармонии и системы «Я – Ты».

- От 5-ти до 8-ми лет – открытие мира чужих мыслей, чувств и образов – системы «Я – Мы».

- От 8 до 13 лет – открытие мира задач и проблем, решенных гениями и талантами человечества – системы «Я – Духовность».

- От 13 до 21 года – открытие способностей самостоятельно решать всем известные задачи, когда мысли, чувства и воображение начинают активно работать, возникает система «Я – Ноосфера».

- От 21 до 34 лет – открытие способности создавать новый мир или его фрагменты – осознание самоконцепции «Я – Творец».

Жизненный путь имеет пространственно-временную структуру. Он состоит из возрастных и индивидуальных фаз, определяемых по многим параметрам жизни. Человек овладевает в определенной мере обстоятельствами своей жизни, становится творцом своей истории и творцом истории общества. Подлинно творческое отношение к жизни, однако, появляется далеко не сразу и даже не у всякого человека. Между фазами жизненного пути существуют генетические связи, и это обуславливает закономерный его характер. Отсюда следует, что в принципе

можно предсказывать будущее развитие на основе знания о ранних его фазах.

### Числа Фибоначчи в астрономии

Из истории астрономии известно, что И.Тициус, немецкий астроном XVIII в., с помощью ряда Фибоначчи нашёл закономерность и порядок в расстояниях между планетами солнечной системы. Но один случай, казалось бы, противоречил закону: между Марсом и Юпитером не было планеты. Но после смерти Тициуса в начале XIX в. сосредоточенное наблюдение за этим участком неба привело к открытию пояса астероидов.

### Заключение

В процессе исследования я выяснил, что числа Фибоначчи нашли широкое применение в техническом анализе цен на бирже. Один из простейших способов применения чисел Фибоначчи на практике – определение отрезков времени, через которое произойдёт то или иное событие, например, изменение цены. Аналитик отсчитывает определённое количество фибоначиевских дней или недель (13, 21, 34, 55 и т.д.) от предыдущего сходного события и делает прогноз. Но в этом мне ещё слишком сложно разобраться. Хотя Фибоначчи и был вели-

чайшим математиком средних веков, единственные памятники Фибоначчи – это статуя напротив Пизанской башни и две улицы, которые носят его имя: одна – в Пизе, а другая – во Флоренции. И всё-таки, в связи со всем увиденным и прочитанным мною возникают вполне закономерные вопросы. Откуда взялись эти числа? Кто этот архитектор вселенной, попытавшийся сделать её идеальной? Что же будет дальше? Найдя ответ на один вопрос, получишь следующий. Разгадаешь его, получишь два новых. Разберёшься с ними, появятся ещё три. Решив и их, обзаведёшься пятью нерешёнными. Потом восьмью, тринадцатью и т.д. Не забывайте, что на двух руках по пять пальцев, два из которых состоят из двух фаланг, а восемь – из трёх.

### Список литературы

1. Волошинов А.В. «Математика и искусство», М., Просвещение, 1992 г.
2. Воробьев Н.Н. «Числа Фибоначчи», М., Наука, 1984 г.
3. Стахов А.П. «Код да Винчи и ряд Фибоначчи», Питер формат, 2006 г.
4. Ф. Корвалан «Золотое сечение. Математический язык красоты», М., Де Агостини, 2014 г.
5. Максименко С.Д. «Сенситивные периоды жизни и их коды».
6. «Числа Фибоначчи». Википедия.