# МАЛОИЗВЕСТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПЛАНИМЕТРИИ

**Хворов И.И.**

*МБОУ СОШ «Аннинского Лицея», 11 «Г» класс*

*Научный руководитель: Дрёмова О.Н., учитель математики, МБОУ СОШ «Аннинского Лицея»*

Данная статья является реферативным изложением основной работы. Полный текст научной работы, приложения, иллюстрации и иные дополнительные материалы доступны на сайте IV Международного конкурса научно – исследовательских и творческих работ учащихся «Старт в науке» по ссылке: https://school-science.ru/1017/7/770.

### Гипотеза, актуальность, цель, задачи проекта, объект и предмет исследований, результаты

***Цель:*** Выявить, доказать малоизвестные теоремы, свойства геометрии.

Задачи исследования:

1. Изучить учебную и справочную литературу.

2. Собрать малоизвестный теоретический материал, необходимый для решения планиметрических задач.

3. Разобраться в доказательствах малоизвестных теорем и свойств.

4. Найти и решить задачи КИМов ЕГЭ, на применение этих малоизвестных теорем и свойств.

***Актуальность:*** В ЕГЭ в заданиях по математике, часто встречаются задачи по геометрии, решение, которых вызывают некоторые затруднения, и заставляют тратить много времени. Умение решать такие задачи является неотъемлемым условием успешной сдачи ЕГЭ профильного уровня по математике. Но есть решение этой проблемы, некоторые из данных задач можно с лёгкостью решить, используя теоремы, свойства, которые являются малоизвестными, и им не уделяется внимание в школьном курсе математики. На мой взгляд, этим можно объяснить мой интерес к теме исследования и её актуальность.

***Объект исследования:*** геометрические задачи КИМов ЕГЭ.

***Предмет исследования:*** малоизвестные теоремы и свойства планиметрии.

***Гипотеза:*** Существуют малоизвестные теоремы и свойства геометрии, знание которых облегчит решение некоторых планиметрических задач КИМов ЕГЭ.

***Методы исследования****:*

1) Теоретический анализ и поиск информации о малоизвестных теоремах и свойствах;

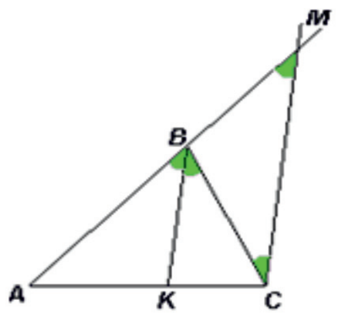
2) Доказательство теорем и свойств

3) Поиск и решение задач с применением данных теорем и свойств

В математике, а в целом в геометрии присутствует огромное количество различных теорем, свойств. Известно много теорем и свойств для решения планиметрических задач, которые актуальны и по сей день, но являются малоизвестными, и очень полезными для решения задач. При изучение данного предмета усваиваются лишь основные, всеми известные теоремы и способы решения геометрических задач. Но помимо этого существует довольно большое количество различных свойств и теорем, которые упрощают решение той, или иной задачи, но мало кто про них знает вообще. В КИМах ЕГЭ решать задачи по геометрии можно в разы проще, зная эти малоизвестные свойства и теоремы. В КИМах задачи по геометрии встречаются в номерах в 8, 13, 15 и 16. Малоизвестные теоремы и свойсва, описанные в моей работе, упрощают в разы решение планиметрических задач.

### Теорема о биссектрисе углов треугольника

**Теорема:** ***биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника***.



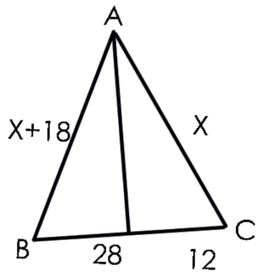

**Доказательство**.

Рассмотрим треугольник ABC и биссектрису его угла B. Проведем через вершину C прямую CM, параллельную биссектрисе BK, до пересечения в точке M продолжением стороны AB. Так как BK – биссектриса угла ABC, то ∠ABK = ∠KBC. Далее, ∠ABK = ∠BMC, как соответственные углы при параллельных прямых, и ∠KBC = ∠BCM, как накрест лежащие углы при параллельных прямых. Отсюда ∠BCM = ∠BMC, и поэтому треугольник BMC – равнобедренный, откуда BC = BM.

По теореме о параллельных прямых, пересекающих стороны угла, имеем АК: КС = АВ: ВМ = АВ: ВС, что и требовалось доказать.

Рассмотрим задачи, при решении которых используется свойство биссектрис треугольника.

**Задача № 1.** В треугольнике АВС биссектриса АН делит сторону ВС на отрезки, длины которых равны 28 и 12. Найдите периметр треугольника АВС, если АВ – АС = 18.




**Дано**:
АВС – треугольник
АН – биссектриса
ВН = 28
НС = 12
**Найти**: Р
Решение:
Пусть АС = Х тогда АВ = Х + 18

По свойству биссектрисы угла альфа, $AB \cdot HC = BH \cdot AC$;

$$28 \cdot X = 12 \cdot (x + 18) x = 13,5,$$

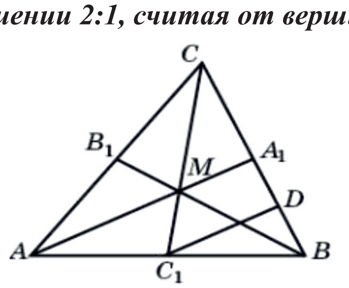
значит АС = 13,5, откуда

$$AB = 13,5 + 18 = 31,5 BC = 28 + 12 = 40,$$

тогда
Р = АВ + ВС + АС = 85
Ответ: 8

**Теорема о медианах треугольника**

**Теорема.** ***Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершины.***




**Доказательство**. В треугольнике А ВС проведем медианы $AA_1$ и $CC_1$ и их точку пересечения обозначим М.

Через точку $C_1$ проведем прямую, параллельную $AA_1$ и ее точку пересечения с ВС обозначим D.

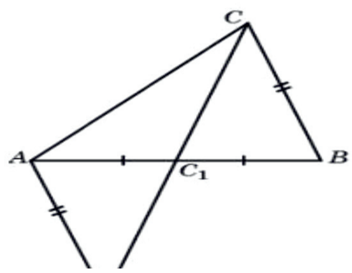
Тогда D – середина $BA_1$, следовательно, $CA_1:A_1D = 2:1$.

По теореме Фалеса, $CM:MC_1 = 2:1$. Таким образом, медиана $AA_1$ пересекает медиану $CC_1$ в точке М, делящей медиану $CC_1$ в отношении 2:1.

Аналогично, медиана $BB_1$ пересекает медиану $CC_1$ в точке, делящей медиану $CC_1$ в отношении 2:1, т.е. точке М.

Рассмотрим примеры решения задач.

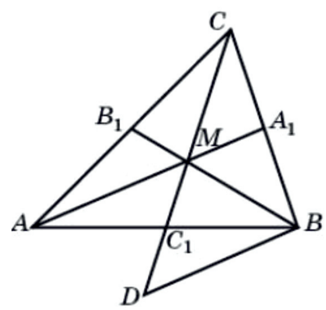
**Задача № 1.** Докажите, что медиана треугольника лежит ближе к большей стороне, т.е. если в треугольнике АВС, АС>ВС, то для медианы $CC_1$ выполняется неравенство $ACC_1 < BCC_1$.




Решение.

Продолжим медиану $CC_1$и отложим отрезок $C_1B$, равный $AC_1$. Треугольник $AC_1D$ равен треугольнику $BC_1C$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, AD = BC,   $ADC_1 = BCC_1$.   В треугольнике ACD AC> AD. Так как против большей стороны треугольника лежит больший угол, то $ADC_1$>ACD. Следовательно, выполняется неравенство $ACC_1<BCC_1$.

**Задача № 2.** Площадь треугольника АВС равна 1. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам данного треугольника.




**Дано**:
АВС-треугольник
S = 1
**Найти:**:$S_2$
Решение:

Пусть $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ – медианы треугольника АВС, пересекающиеся в точке М. Продолжим медиану СС1 и отложим отрезок $C_1D$, равный $MC_1$.

Площадь треугольника ВМС равна 1/3, и его стороны равны 2/3 медиан исходного треугольника. Следовательно, площадь треугольника, стороны которого равны медианам данного треугольника, равна 3/4. Выведем формулу, выражающую медианы треугольника через его стороны. Пусть стороны треугольника ABC равны a, b, c. Искомую длину медианы CD обозначим mc. По теореме косинусов имеем:

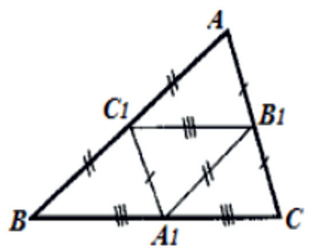
$$b^2 = m_c^2 + \frac{c^2}{4} - 2m_c\frac{c}{2}\cos ADC$$

$$a^2 = m_c^2 + \frac{c^2}{4} - 2m_c\frac{c}{2}\cos BDC$$

Складывая эти два равенства и учитывая, что cosADC = –cosBDC, получаем равенство: $a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$ из которого находим $m_c = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}{2}$.

**Теорема о средних линиях треугольника**

**Теорема:** ***три средние линии треугольника делят его на 4 равных треугольника, подобных данному с коэффициентом подобия ½***




Доказательство:

Пусть ABC – треугольник. $C_1$ – середина AB, $A_1$ – середина BC, $B_1$- середина AC.

Докажем, что треугольники $AC_1B_1$, $BC1A_1$, $A_1B_1C$, $C_1B_1A_1$ равны.

Так как $C_1$ $A_1$ $B_1$ – середины, то $AC_1 = C_1B$, $BA_1 = A_1C$, $AB_1 = B_1C$.

Используем свойство среднее линии:

$C_1A_1 = 1/2 \cdot AC = 1/2 \cdot (AB_1 + B_1C) = 1/2 \cdot (AB_1 + AB_1) = AB_1$

Аналогично $C_1B_1 = A_1C$, $A_1B_1 = AC_1$.

Тогда в треугольниках $AC_1B_1$, $BA_1C_1$, $A_1B_1C$, $C_1B_1A_1$

$AC_1 = BC_1 = A_1B_1 = A_1B_1$

$AB_1 = C_1A_1 = B_1C = C_1A_1$

$C_1B_1 = BA_1 = A_1C = C_1B_1$

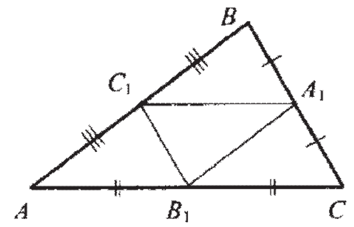
Значит треугольники равны по трем сторонам, из этого следует, что

$A_1/B_1 = A_1C_1/AC = B_1C_1/BC = ½$

Теорема доказана.

Рассмотрим решение задач с применением свойства средних линий треугольника.

**Задача № 1.** Дан треугольник ABC со сторонами 9,4 и 7. Найдите периметр треугольника $C_1A_1B_1$вершинами которого являются середины данных сторон




**Дано:** треугольник – ABC

9,4,7-стороны треугольника

**Найти**: P

Решение

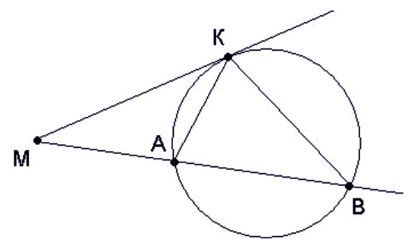
По свойству подобия треугольников: 3 средние линии треугольника делят его на 4 равные треугольника, подобные данному с коэффициентом 1/2.

$C_1A_1 = 9/2 = 4.5$ $A_1B_1 = 4/2 = 2$ $C_1B_1 = 7/2 = 3.5$ отсюда периметр равен = 4,5 + 2 + 3,5 = 10

Ответ: 10

**Свойство касательной к окружности**

**Теорема:** ***квадрат касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть.***

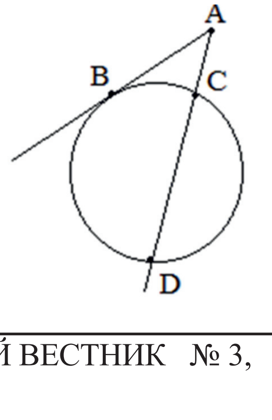



Доказательство.

Проведём отрезки AK и BK.Треугольники AKM и BKM подобны т. к. угол M у них общий. А углы AKM и B равны, так как каждый из них измеряется половиной дуги AK. Следовательно, MK/MA = MB/MK, или MK² = MA·MB**.**

Примеры решения задач.

**Задача № 1.** Из точки A вне окружности проведены секущая, длиной 12 см и касательная, длина которой в 2 раза меньше отрезка секущей, находящегося внутри окружности. найдите длину касательной.



Дано:
AD = 12
ACD-секущая
CD/AB = 2
**Найти:** AB
Решение:

Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной,

то есть $AD \cdot AC = AB^2$. Или$AD \cdot (AD-2AB) = AB^2$.

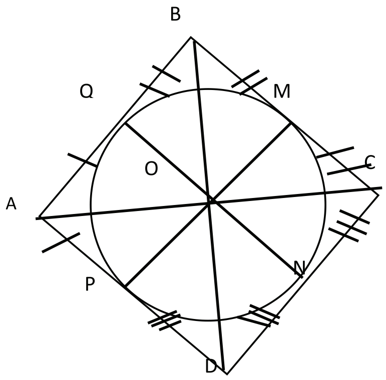
Подставляем известные значения: $12(12-2AB) = AB^2$ или $AB^2 + 24 \cdot AB-144$.

$AB = -12 + 12\sqrt{2} = 12(\sqrt{2}-1)$

### Свойство сторон описанного четырёхугольника

**Теорема:** у ***четырёхугольника, описанного около окружности, суммы длин противоположных сторон равны***

**Доказательство**:




По свойству касательной AP = AQ, DP = DN,CN = CM,и BQ = BM, получаем, что

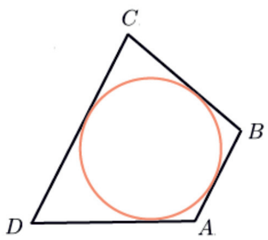
$$AB + CD = AQ + BQ + CN + DN \text{и} BC + AD = BM + CM + AP + DP.$$

Следовательно

$$AB + CD = BC + AD$$

Рассмотрим примеры решения задач.

**Задача № 1.** Три стороны описанного около окружности четырехугольника относятся (в последовательном порядке) как 1:2:3. Найдите большую сторону этого четырехугольника, если известно, что его периметр равен 32.

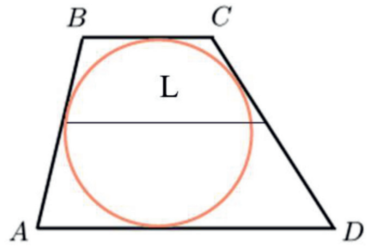



Дано:
ABCD – четырёхугольник
AB:BC:CD = 1:2:3
P = 32
**Найти:** DC
Решение:

Пусть сторона AB = x, тогда AD = 2x, а DC = 3x. По свойству описанного четырехугольника, суммы противоположных сторон равны, и значит x + 3x = BC + 2x, откуда BC = 2x, тогда периметр четырехугольника равен 8X.

Получаем, что x = 4, а большая сторона равна 12.

Ответ: 12




**Задача № 2.** Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 40. Найдите ее среднюю линию.

Дано:
ABCD-трапеция, l – средняя линия
P = 40
**Найти:** L

**Решение:** Средняя линия трапеции равна полусумме оснований. Пусть основания трапеции равны *a* и *c*, а боковые стороны *b* и *d*.По свойству описанного четырехугольника, $a + c = b + d$, и значит, периметр равен $2(a + c)$.

Получаем, что a + c = 20, откуда L = 10

Ответ:10

### Формула Пика

Теорема Пика: площадь многоугольника равна:

$$Г:2 + В – 1,$$

где Г – число узлов решетки на границе многоугольника

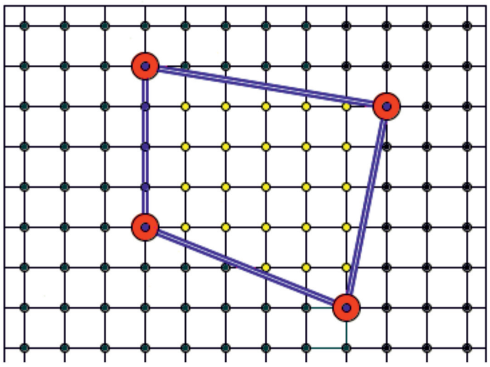
В – число узлов решетки внутри многоугольника.

Например, для вычисления площади четырёхугольника, изображённого на рисунке, считаем:

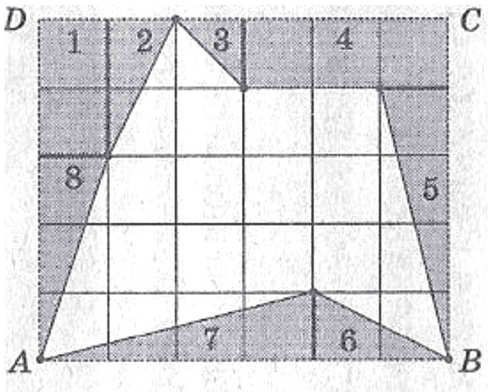
$$Г = 7, В = 23,$$

откуда S = 7:2 + 23 – 1 = 25,5.

Площадь любого многоугольника, нарисованного на клетчатой бумаге, легко посчитать, представив её как сумму или разность площадей прямоугольных треугольников и прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, проходящим через вершины нарисованного треугольника.



В некоторых случаях и вовсе можно применить готовую формулу площади треугольника или четырёхугольника. Но в отдельных случаях данные методы применить либо невозможно, либо процесс их применения является трудоёмким, неудобным.




Чтобы вычислить площадь многоугольника, изображенного на рисунке, применяя формулу Пика, имеем: S = 8/2 + 19-1 = 22.

## Заключение

В ходе исследований подтвердилась гипотеза о том, что в геометрии существуют малоизвестные из школьного курса теоремы и свойства, которые упрощают решение некоторых планиметрических задач, в том числе и задач КИМов ЕГЭ.

Мне удалось найти такие теоремы и свойства и применить их к решению задач, и доказать, что их применение сводит огромные решения некоторых задач, к решениям за пару минут. Применение описанных в моей работе теорем, свойств в отдельных случаях позволяет решить задачу сходу и устно, и позволяет сохранить больше времени на ЕГЭ и просто при их решение в школе.

Я считаю, что материалы моих исследований могут быть полезны выпускникам при подготовке к сдаче ЕГЭ по математике.

## Список литературы

1. Геометрия 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов. – 10-я изд. – М.: Просвещение, 2016. – 240 с.
2. http://ru.solverbook.com
3. http://ege-study.ru
4. https://reshyege.ru/
5. http:// www.fmclass.ru/math.php?id = 4850e0880794e
6. http://tehtab.ru
7. https://ege.sdamgia.ru/problem?id = 50847
8. http://alexlarin.net/ege17.html