

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КРУГА И ТРЕУГОЛЬНИКА РЁЛО

Крутова О.В.

г. Астрахань, Гимназия № 3, 9 «Б» класс

Научный руководитель: Лебедева С.В., учитель математики, г. Астрахань, Гимназия № 3

Актуальность исследования. Несколько тысяч лет назад было изобретено колесо, которое произвело переворот в жизни человека. Определяющим свойством круга, лежащего в основе колеса, следствием которого стало техническое завоевание мира, стало свойство постоянства ширины. К множеству фигур постоянной ширины, кроме круга, относятся «круглые» n -угольники (где n – нечетное число), среди которых особенными «замечательными» свойствами обладает треугольник Рёло. Если внимательно присмотреться к окружающим нас предметам, то можно заметить, что многие из них имеют форму фигур равной ширины. На фотографии 1 представлены некоторые из них: ластик, сувенирные тарелочки, деревянный круг и треугольник Рёло.

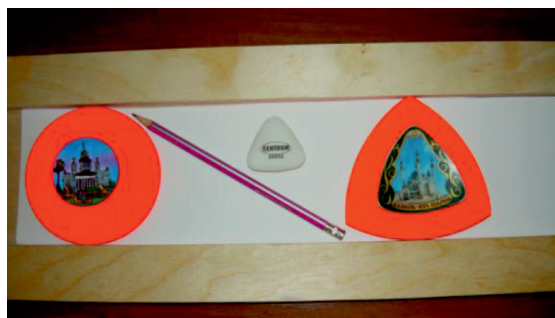


Фото 1. Окружающие нас предметы, изготовленные в форме фигур равной ширины

Плектр или медиатор, который необходим при игре на щипковых музыкальных инструментах, тоже не что иное, как треугольник Рёло. Практически все технические устройства имеют в своем составе элементы, изготовленных в форме фигур равной ширины. Почему эти объекты получили столь широкое распространение в жизни человека? Какими геометрическими свойствами обладают эти фигуры? Поиску ответов на эти вопросы посвящено данное исследование.

Объектом исследования являются геометрические фигуры равной ширины – круг и треугольник Рёло.

Предметом исследования является разработка способов изображения, расчета

и экспериментального нахождения геометрических и физических параметров фигур равной ширины.

Цель работы – исследовать свойства геометрических фигур равной ширины, придумать и решить практически значимые задачи на нахождение величин, характеризующих свойства этих фигур.

Для достижения поставленной цели были поставлены и решены следующие **задачи исследования**:

1. Выявить способы построения основных фигур равной ширины, изобразить и изготовить их.
2. Придумать идею экспериментального доказательства принадлежности круга и треугольника Рёло к фигурам равной ширины; реализовать идею в виде интерактивной модели.
3. Разработать метод расчета площади фигур равной ширины.
4. Найти периметр фигур равной ширины.
5. Определить траекторию движения различных точек фигур равной ширины при качении по горизонтальной плоскости.
6. Провести экспериментальное исследование движения тел, перемещаемых с помощью фигур равной ширины.
7. Придумать и решить практически значимые задачи на нахождение параметров фигур равной ширины; нарисовать рисунок, состоящий из фигур равной ширины.

Результаты данного исследования апробированы на Всероссийском Фестивале творческих открытий и инициатив «Леонардо» г. Астрахань (Гран-при); Международной научно-практической конференции ассоциированных школ ЮНЕСКО РФ «Мир вокруг нас» г. Астрахань (1 место); Фестивале школьной науки ассоциированных школ ЮНЕСКО РФ «Школьник в современном мире» г. Уфа (3 место); III Международной научно-практической конференции школьников г. Чебоксары (1 место); XXIII Областной научно-исследовательской конференции учащихся г. Астрахань (2 место); VI Международном научном форуме молодых ученых, студентов и школьников «Потенциал интеллектуально одаренной молодежи – развитию науки и образования» г. Астрахань (1 место).

Изучение основных геометрических свойства фигур равной ширины

Создание модели для исследования свойств плоских геометрических фигур равной ширины

Круг относится к фигурам равной ширины и имеет ширину равную диаметру окружности, ограничивающей его. Другой фигурой равной ширины, является треугольник Рёло. Треугольником Рёло называют область пересечения трех окружностей, построенных из вершин правильного треугольника. Они имеют радиус, равный стороне этого же треугольника. Также как и круг, он относится к классу геометрических фигур, обладающих постоянной шириной. По мнению историков, название это фигуре дал немецкий механик Франц Рёло (1829 – 1905 гг.). Встречаются и другие варианты транскрипции фамилии Reuleaux. Например, И.М. Яглом и В.Г. Болтянский в книге «Выпуклые фигуры» называют его «треугольником Релло» [3]. Многие историки сходятся в том, что именно он стал первооткрывателем свойств этой геометрической фигуры, потому как он первый широко использовал его свойства и возможности в своих механизмах.

Некоторые математики считают, что первым продемонстрировал идею треугольника из равных дуг окружности Леонард Эйлер в XVIII веке. А третьи «увидели» треугольник Рёло в рукописях гениального Леонардо да Винчи. Манускрипты этого естествоиспытателя, с изображением этой «простой» фигуры, хранятся в Мадридском кодексе и в Институте Франции [5].

Для исследования свойств плоских фигур равной ширины, прежде всего, необходимо построить основные из них.

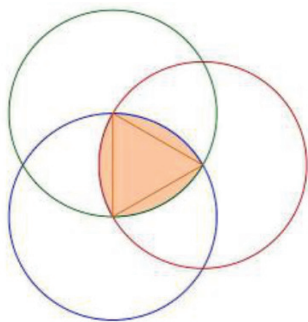


Рис. 1. Построение треугольника Рёло с помощью циркуля

Треугольник Рёло можно построить с помощью одного только циркуля, не прибегая к линейке. Это построение сводится к последовательному проведению трёх равных окружностей. Центр первой выберем произвольно и проведем окружность. Поставим

ножку циркуля в любую точку первой окружности и проведем вторую окружность. Далее, за центр третьей окружности выберем любую из двух из точек пересечения первых двух окружностей. На пересечении трех окружностей получается треугольник Рёло (рис. 1).

Экспериментальное доказательство принадлежности круга и треугольника Рёло к фигурам равной ширины

Для доказательства факта, что круг и треугольник Рёло являются фигурами равной ширины, а также для исследования свойств этих фигур нами придумана и изготовлена интерактивная модель, приведенная на фотографии 2.

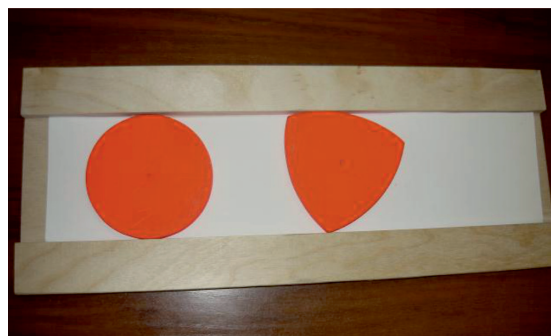


Фото 2. Интерактивная модель для исследования свойств плоских геометрических фигур равной ширины

Она состоит из двух параллельных кафельных, изготовленных из фанеры, расстояние между которыми зафиксировано ($a = 10$ см) и равно ширине круга и треугольника Рёло. Эти фигуры мы сначала построили на бумаге, вырезали и перенесли на фанеру. Построенный круг имеет радиус 5 см, а его диаметр d равен ширине a ($a = d = 10$ см). Для изображения треугольника Рёло мы использовали способ построения с помощью циркуля. На пересечении трех окружностей радиусом 10 см каждая получился треугольник Рёло, имеющий ширину $a = 10$ см (каждая сторона равностороннего треугольника, лежащего в основе треугольника Рёло равна 10 см).

Электрическим лобзиком вырезали фанерные фигуры равной ширины, которые являются в данной модели объектами исследования. Эти фигуры покрыли красной люминесцентной краской. Подробнее способ изготовления и применения данной модели описаны в работе [1].

С помощью данной модели можно доказать, что круг и треугольник Рёло являются фигурами равной ширины. Для этого будем поочередно вращать получившиеся фигуры между двумя параллельными прямыми. При вращении круг постоянно касается

обеих прямых двумя точками ограничивающей его окружности. При вращении треугольника Рёло, он также касается прямых в двух точках: одна точка касания всегда расположена в одном из «углов» круглого треугольника, а другая – на противоположной дуге окружности.

Вывод: ширина круга и треугольника Рёло постоянна по всем направлениям и равна расстоянию между параллельными прямыми (в нашей модели это расстояние равно 10 см).

Расчет площади фигур равной ширины.

Нахождение фигур равной ширины, обладающих наименьшей и наибольшей площадью

Следующая задача нашего исследования состоит в том, чтобы вычислить площадь некоторых фигур равной ширины и установить, какие из них обладают экстремальными свойствами, то есть имеют минимальную и максимальную площадь для заданной ширины a .

Для круга диаметр равен заданной ширине a . Найдем площадь круга $S_{\text{круга}}$

$$S_{\text{круга}} = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Выведем формулу для расчета площади треугольника Рёло. Воспользуемся методом разложения фигуры на ее составляющие. Из рис. 2 видно, что треугольник Рёло состоит из равностороннего треугольника и трёх сегментов.

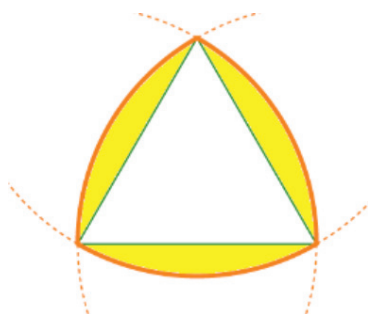


Рис. 2. Треугольник Рёло

Поэтому площадь треугольника Рёло $S_{\text{Рёло}}$ равна

$$S_{\text{Рёло}} = S_{\Delta} + 3S_{\text{сегмента}}.$$

$$S_{\text{Рёло}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi a^2 - 3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3} + 2\pi a^2 - 3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi a^2 - 2a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Вынеся за скобки $2a^2$ и сократив на 2, получим

$$S_{\text{Рёло}} = \frac{a^2(\pi - \sqrt{3})}{2}.$$

Найдем площадь равностороннего треугольника S_{Δ} , лежащего внутри треугольника Рёло, каждая сторона которого равна a

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a^2 \sin \varphi.$$

Треугольник равносторонний, все его углы равны 60° . Известно, что $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $S_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Далее рассчитаем площадь сегмента. Из рис. 3 видно, что площадь одного сегмента можно найти, если вычтем из площади сектора $S_{\text{сектора}}$ площадь треугольника S_{Δ}

$$S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сектора}} - S_{\Delta}.$$

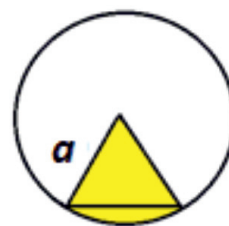


Рис. 3. Круговой сектор

Круговым сектором называется общая часть круга и центрального угла φ с вершиной в центре этого круга. Для нахождения формулы площади произвольного сектора заметим, что площадь сектора с центральным углом в 1° в 360 раз меньше площади круга и, следовательно, площадь сектора с центральным углом в φ градусов будет выражаться формулой

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi r^2 \varphi}{360^\circ}.$$

В нашем случае $\varphi = 60^\circ$, а радиус окружности r равен заданной ширине a . Тогда

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi r^2 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi a^2}{6}.$$

Для нахождения площади сегмента, вычтем из площади сектора площадь треугольника

$$S_{\text{сегмента}} = \frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi a^2 - 3a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Найдем площадь треугольника Рёло

Найдем численное значение площади круга и площади треугольника Рёло для заданной ширины a

$$S_{\text{круга}} = \frac{\pi a^2}{4} = 0,785398 a^2,$$

$$S_{\text{Рёло}} = \frac{a^2(\pi - \sqrt{3})}{2} = 0,704770 a^2.$$

Вывод: среди фигур равной ширины наименьшую площадь имеет треугольник Рёло, наибольшую площадь – круг. Площади всех других многоугольников Рёло больше площади треугольника Рёло, но меньше площади круга.

Нахождение периметра фигур равной ширины

Решим следующую задачу нашего исследования, а именно найдем периметр фигур равной ширины. На первый взгляд может показаться, что фигура, имеющая наибольшую площадь – круг – должна иметь и наибольший периметр, а наименьший периметр должен быть у треугольника Рёло. Однако, это предположение ложно.

В 1860 году французский математик Барбье доказал следующую теорему: *длина любой кривой постоянной ширины a равна πa* . Существует несколько доказательств теоремы Барбье: 1) основанное на методах выпуклой геометрии; 2) основанное на теории вероятности [5]. Эти доказательства достаточно сложны. В нашем исследовании мы предлагаем следующие доказательства этой теоремы, применительно к кругу и треугольнику Рёло.

Доказательство 1.

Возьмем фигуры равной ширины (круг и треугольник Рёло), изготовленные из фанеры и нерастяжимую тесьму. Обернём каждую из фигур по периметру тесьмой и измерим её длину в каждом случае (фотография 3). Длина тесьмы при измерении периметра обеих фигур одинакова и равна $31,4 \pm 0,1$ см.

Полученное численное значение периметра круга и круглого треугольника в пределах погрешности измерений удовлетворяет значению периметра этих фигур, рассчитанному по формуле $P = \pi a$.



Фото 3. Применение интерактивной модели для доказательства равенства периметров круга и треугольника Рёло

Доказательство 2.

Вычислим периметр круга и треугольника Рёло, имеющих ширину a .

Периметр круга равен длине ограничивающей его окружности (рис. 4).

$$P_{\text{круга}} = l = 2\pi r = 2\pi \frac{a}{2} = \pi a.$$

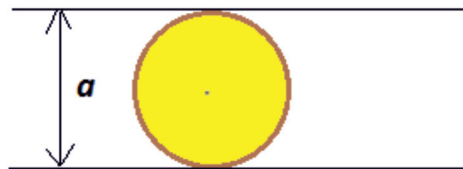


Рис. 4. К расчёту периметра круга

Периметр треугольника Рёло равен сумме длин трёх дуг. Длину одной дуги найдем из следующих соображений: длина дуги меньше длины окружности во столько же раз, во сколько центральный угол сектора, содержащего эту дугу, меньше 360° (рис. 5).

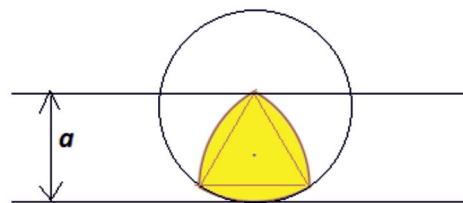


Рис. 5. К расчёту периметра треугольника Рёло

Длина окружности радиусом a равна

$$l_1 = 2\pi a.$$

Так как угол $\varphi = 60^\circ$, длина дуги в 6 раз меньше длины окружности l_1

$$l_{\text{дуги}} = l_1 \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{l_1}{6} = \frac{2\pi a}{6} = \frac{\pi a}{3}.$$

Периметр треугольника Рёло равен

$$P_{\text{Рёло}} = 3l_{\text{дуги}} = \pi a.$$

Вывод: периметры круга и треугольника Рёло одинаковы и равны πa .

Исследование характера движения фигур равной ширины

Определение траекторий движение различных точек фигур равной ширины при качении по горизонтальной плоскости

Выше доказано, что периметры плоских фигур равной ширины одинаковы. С опорой на этот факт можно предположить, что точки, расположенные на кривых, ограничивающих круг и треугольник Рёло, при качении их по плоской горизонтальной плоскости, будут описывать похожие траектории. При

совершении одного полного оборота кругом и треугольником Рёло, эти точки должны совпасть. Экспериментальное подтверждение этого факта может служить третьим доказательством теоремы Барбье для круга и треугольника Рёло.

Построим траектории движения двух характерных точек фигур равной ширины, которые являются объектами исследования в созданной нами модели, при качении их по плоской горизонтальной поверхности. В качестве таких точек выберем геометрический центр и одну из вершин многоугольника Рёло. Будем катить каждую фигуру и отмечать положение характерных точек цветными ручками. Соединив образовавшиеся точки, можно установить по какой траектории двигаются точки этих фигур. Результаты проведенного нами моделирования одного полного оборота круга и треугольника Рёло показаны на фотографии 4. Зелёной ручкой мы отмечали точки при качении треугольника Рёло, а красной ручкой – круга. Соединив построенные точки, получим траектории движения точек на обode этих фигур.

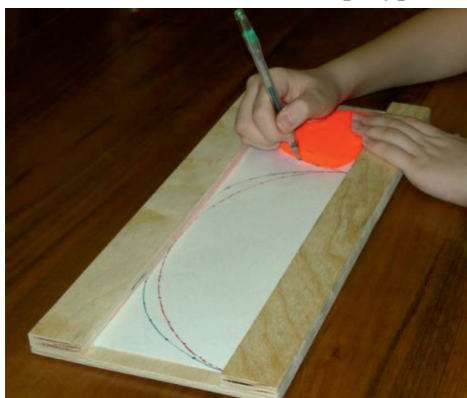


Фото 4. Применение модели для построения траекторий движения точек на обode круга и треугольника Рёло

Вывод: траектории движения точек на обode круга и треугольника Рёло при их качении по плоскости представляют собой циклоиды. При совершении одного полного оборота кругом и треугольником Рёло, эти точки совпали. Этот факт служит доказательством равенства периметров круга и треугольника Рёло.

Экспериментальное исследование движения тел, перемещаемых с помощью фигур равной ширины

Наши предки использовали круглые брёвна одинакового диаметра для перемещения огромных камней, массивных скульптур, на которые ставили плоскую платформу с грузом. Такой способ возможен потому, что круг – фигура равной ширины.

Выше доказано, что к семейству фигур равной ширины относится и треугольник Рёло, а значит, он также может быть использован для перемещения тел.

Для проверки этого предположения нами был проведен следующий эксперимент. В качестве катков, имеющих в поперечном сечении треугольник Рёло, были выбраны карандаши. В качестве платформы использована крышка от коробки, а в качестве груза и одновременно индикатора – фужер с вишнёвым соком (фотография 5). Будем катить крышку по каткам-карандашам и наблюдать за уровнем сока. При качении уровень сока в фужере остается постоянным, а значит, перемещаемое тело движется прямолинейно.



Фото 5. Экспериментальное исследование движения тел, перемещаемых с помощью катков-карандашей, имеющих в сечении треугольник Рёло

Вывод: так как сечение катков представляет собой фигуру равной ширины, то плоская платформа, опирающаяся на эти катки, движется прямолинейно и остается параллельной плоскости, по которой осуществляется качение.

Разработка и решение практически значимых задач на нахождение параметров фигур равной ширины

Выведенные формулы для расчета площади и периметра фигур равной ширины могут быть применены для решения ряда практически значимых задач. Разработаем такие задачи и покажем пример решения одной из них.

Задача о крышках люков

Крышки для люков изготавливают в форме круга (в России) или в форме треугольника Рёло (в Сан-Франциско), так как они относятся к фигурам равной ширины и не при каких обстоятельствах не могут провалиться в люк. Приняв, что крышки люков изготовлены из одного и того же

сплава плотностью ρ , имеют равную ширину a и толщину h , установить на сколько процентов масса крышки, изготовленная в форме треугольника Рёло, меньше массы круглой крышки.

Решение:

Массу круглой крышки

$$m_{\text{круга}} = \rho V_{\text{круга}} = \rho S_{\text{круга}} h,$$

$$S_{\text{круга}} = \frac{\pi a^2}{4} = 0,785398 a^2.$$

Масса крышки, изготовленной в форме треугольника Рёло

$$m_{\text{Рёло}} = \rho V_{\text{Рёло}} = \rho S_{\text{Рёло}} h,$$

$$S_{\text{Рёло}} = \frac{a^2 (\pi - \sqrt{3})}{2} = 0,704770 a^2.$$

Найдем отношение массы круглой крышки к массе крышки, изготовленной в форме треугольника Рёло. Сократив на плотность ρ , ширину a и толщину h , получим, что отношение масс фигур равно отношению их площадей

$$\frac{m_{\text{круга}}}{m_{\text{Рёло}}} = \frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{Рёло}}} = \frac{0,785398}{0,704770} = 1,1144.$$

Таким образом, масса круглой крышки примерно на 11% больше, чем масса крышки, изготовленной в форме треугольника Рёло. Если круглая крышка обычно имеет массу около 30 кг, то крышка в форме круглого треугольника более чем на 3 кг меньше. Вот такая экономия металла и облегчение труда рабочих.

Задача о карандашах

Обычные карандаши изготавливают разной формы: в их сечении может быть круг, а может быть треугольник Рёло. Определите, сколько кубометров леса экономят производители карандашей, в сечении которых лежит треугольник Рёло.



Задача о монетах

Монета Великобритании пятьдесят пенсов изготовлена в форме семиугольника Рёло. Её диаметр равен 27,3 мм, масс 8 г, толщина 1,78 мм, а изготовлена из сплава меди и никеля (75% Cu, 25% Ni). Сколько меди и никеля удалось сэкономить англичанам на производ-

стве скруглённых монет, если на декабрь 2005 года в обращении находилось 769 миллионов 50-центовых монет.

Задача о «Кёльнском треугольнике»

В 2006 году в Кёльне была построена 103-метровая башня, сечение которой представляет собой треугольник Рёло. Один человек обходит башню «Кёльнский треугольник», другой – круглую башню такой же ширины. Какому человеку удастся раньше обойти здание, если скорость их движения одинакова и равна 5 км/ч.

В нашей работе мы применили приобретенные умения построения геометрических фигур равной ширины для изображения рисунка «В мире фигур равной ширины», который приведен в приложении 1. Этот рисунок можно использовать в качестве дидактического средства при выполнении следующих заданий:

1. Сколько фигур равной ширины изображено на рисунке?

2. Какой способ был использован для построения треугольников Рёло, образующих центральный «цветок»?

3. Какой способ был использован для построения треугольников Рёло в фигурах, расположенных в углах рисунка?

4. Выполните необходимые измерения и найдите площадь одного из треугольников Рёло, образующих центральный «цветок»? Найдите периметр этого треугольника?

5. Найдите площадь треугольника, образованного при пересечении дуг трех окружностей радиусом 2 см.

Заключение

В процессе проведения исследования получены следующие *новые результаты*:

- Разработана и создана интерактивная материальная модель, с помощью которой:

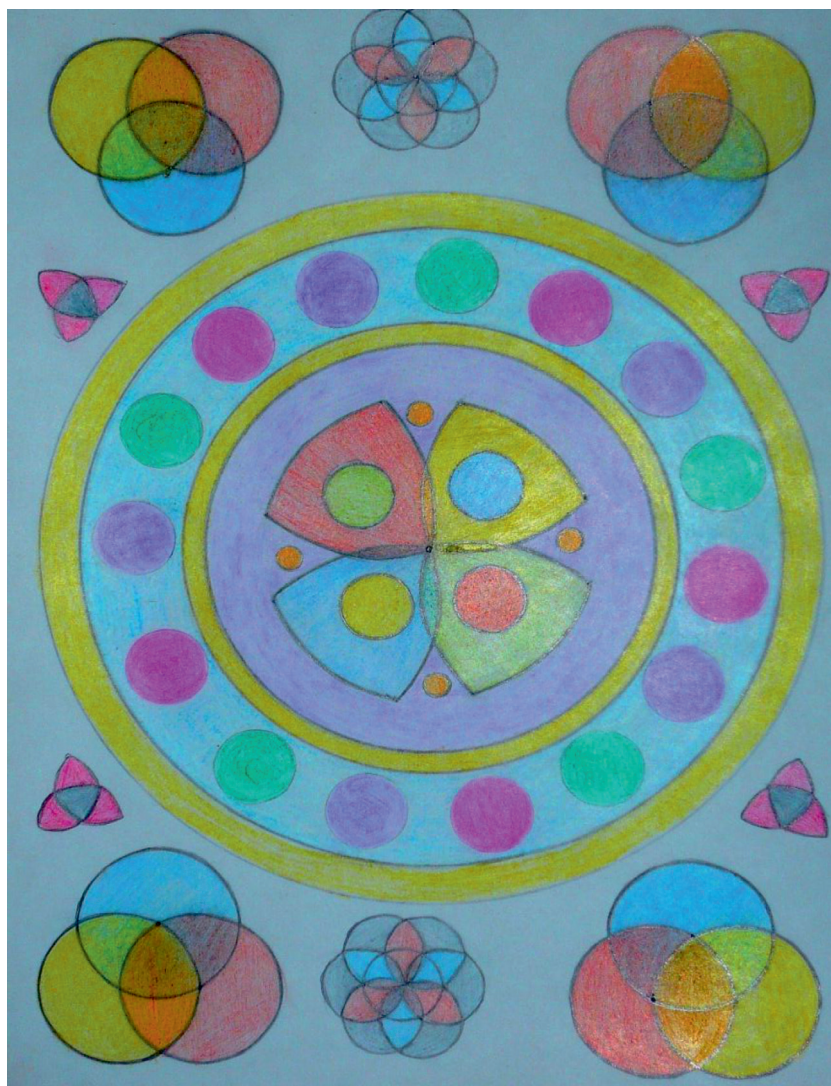
- 1) экспериментально доказана принадлежность круга и треугольника Рёло к фигурам равной ширины;

- 2) найдены периметры фигур равной ширины и доказано, что круг и треугольник Рёло имеют одинаковый периметр;

- 3) установлена траектория движения различных точек фигур равной ширины при качении по горизонтальной плоскости.

- Разработан метод расчета площади фигур равной ширины, реализация которого позволила доказать, что круг имеет наибольшую площадь, а треугольник Рёло – наименьшую среди множества фигур заданной постоянной ширины.

- Придумана идея и проведено экспериментальное исследование движения тел, перемещаемых с помощью фигур равной ширины.



В мире фигур равной ширины

- Разработаны и решены практически значимые задачи на нахождение параметров фигур равной ширины.
- Нарисован рисунок, состоящий из плоских фигур равной ширины.

Список литературы

1. Крутова О.В. Исследование свойств геометрических фигур равной ширины [Текст] / О.В. Крутова, С.В. Лебедева // Летние каникулы: материалы III Международной научно-практической конференции школьников (Чебоксары, 31 авг. 2016 г.). – Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2016. – С. 51-57.
2. Математическая составляющая / Редакторы-составители Н.Н. Андреев, С.П. Коновалов, Н.М. Панюнин. – М.: Фонд «Математические этюды», 2015. – 151 с.
3. Яглом И.М., Болтянский В.Г. Фигуры постоянной ширины // Выпуклые фигуры. – М. –Л.: ГГТИ, 1951. – 343 с.
4. ru.wikipedia.org Треугольник Рёло – Википедия.
5. www.etudes.ru Круглый треугольник Рёло: Математические этюды.
6. www.etudes.ru Изобретая колесо: Математические этюды.