ИЛЛЮСТРАТИВНОЕ ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ И ВУЗЕ

Аблязов Т.Ф., Мамаева Е.В., Плечунь А.В., Цейтлер Р.К.

Гуманитарно-педагогической академии (филиала)
ФГАОУ ВО «Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, Ялта, 1 курс

Научные руководители: [1]Гирлин С.К., профессор кафедры математики, теории и методики обучения математике, канд. физ.-мат. наук, доцент, Почетный доктор наук РАЕ, профессор РАЕ; [2]Ференчук И.И., Гуманитарно-педагогической академии (филиала)
ФГАОУ ВО «Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского», Ялта

«... при изучении наук примеры полезнее правил».

И. Ньютон.
Всеобщая арифметика. – М., 1948, стр. 243.

Анализ имеющихся публикаций и исследований. Далеко не все обучающиеся (как в общеобразовательной школе, так и в вузе) обладают хорошими способностями к абстрактному мышлению. Хороший педагог математики обязательно должен это учитывать и при преподавании математики постепенно, не спеша повышать уровень абстрагирования. Как писал известный математик Ф. Клейн: «Я хотел бы … сослаться на тот биогенетический основной закон, по которому индивид в своем развитии пробегает в сокращенном виде все стадии развития вида; эти идеи стали в настоящее время общим достоянием образованного человека. Этому основному закону, я полагаю, должно было бы следовать – по крайней мере в общих чертах – и преподавание математики, как и вообще всякое преподавание. Мы должны приспособляться к природным склонностям юношей, медленно вести их к высшим вопросам и лишь в заключение ознакомить их с абстрактными идеями; преподавание должно идти по тому же самому пути, по которому все человечество, начиная со своего наивного первобытного состояния, дошло до вершин современного знания! Необходимо всегда повторять это требование, так как всегда находятся люди, которые по примеру средневековых схоластов начинают свое преподавание с самых общих идей и защищают этот метод как якобы единственно научный. А между тем это основание неправильно: научно обучать значит учить человека научно думать, а не оглушать его с самого начала холодной, научно наряженной систематикой. Существенное препятствие к распространению такого естественного и поистине научного метода обучения представляет собой, несомненно, недостаток в знакомстве с историей математики, Чтобы с этим бороться, я особенно охотно вплетал в мое изложение многочисленные исторические моменты, Пусть это покажет Вам, как медленно возникали все математические идеи, как они почти всегда всплывали сперва скорее в виде догадки и лишь после долгого развития приобретали неподвижную выкристаллизованную форму систематического изложения» [8, с. 38].

Конечно, каждый слышал на уроках математики, что пример не является доказательством, что доказывать рассматриваемый общий случай на примере, на частном случае нельзя! Мы уже утверждаем, что не только можно, но и нужно это делать! Правда, при этом необходимо придерживаться некоторых ограничений на выполнение операций.

Пусть имеется какое-либо множество объектов (например, множества действительных чисел R или множества $C[a, b]$ дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций), определенное свойство которых требуется доказать. Обычно представитель этого множества в тексте доказательства обозначается абстрактным символом (например, буквой a или символами $f(x)$). Такого рода абстракция (например, рассмотрение вместо конкретного действительного числа 6 абстрактного символа – буквы a) позволяет только лишь указывать какие-либо операции (действия) над этим символом, но не производить эти операции (например, a^2 не возможно вычислить, так как само a не задано). Однако если в качестве представителя рассматриваемого множества объектов взять конкретный элемент этого множества и проводить доказательство точно так же как и в случае символьного его обозначения, заменив символ на конкретный элемент множества и не производя при этом никаких действий над этим элементом, а лишь указывая эти действия (тем самым выбранный представитель, например число, играет роль переменной), то каждый шаг доказательства, каждую формулу в цепочке выводимых формул можно проверять (сама проверка или иллюстрация в строгое доказательство, естественно, входить не может, а лишь служит для убеждения нашей интуиции в справедливости логического вывода). Хотя иллюстративные рассуждения и не относятся к строгому доказательству теоремы, ценность их не ограничивается наглядной иллюстрацией рассуждений: с помощью индуктивных иллюстративных рассуждений возможно обнаружить и доказать новые свойства подкласса рассматриваемого класса объектов или же доказать уже известное свойство для более широкого класса объектов, т.е. обнаружить и доказать новые теоремы, что весьма полезно для развития творческих способностей студентов. Так, с помощью индуктивного ИР-метода обнаружены и доказаны обобщенные аналоги дифференциальных теорем Лагранжа и Коши о среднем или о конечных приращениях [7]. Примеры репрезентативных, иллюстративных, иллюстративно-репрезентативных методов (Р-методов, И-методов, ИР-методов соответственно) теорем математического анализа, теории дифференциальных и интегральных уравнений, математической теории развития можно найти соответственно в [1-7, 15].

Постановка задачи. На простых примерах продемонстрировать преимущества Р-, И- и ИР-методов рассуждений при введении новых понятий и доказательств теорем элементарной и высшей математики, причем предложенные доказательства должны быть новыми, ранее не публиковавшимися.

Актуальность поставленной задачи. Поиски новых методов обучения математике, позволяющих сделать математическое доказательство более убедительным (а именно в этом и состоит цель доказательства), несомненно принадлежат к весьма актуальным вопросам повышения качества получаемого математического образования.

Цель настоящего исследования: демонстрация удобства и преимуществ применения при обучении и самообучении школьников и студентов сочетания репрезентативного и иллюстративного методов рассуждения на примере доказательств теорем элементарной и высшей математики.

Объект исследования: рассуждения, применяемые при доказательстве теорем.

Предмет исследования: наглядные логические методы рассуждения в математике.

Цели и задачи исполнителей работы:

1. Изучить и проанализировать научную, научно-методическую, периодическую печать и передовой опыт с целью раскрытия понятий различных методов рассуждения.
2. Раскрыть сущность индуктивного, иллюстративного и репрезентативного рассуждения.
3. Привести примеры простейших ИР-доказательств.
4. Продемонстрировать эффективность применения Р-, И-, ИР-методов доказательств в элементарной и высшей математике.

Вклад каждого соавтора и научных руководителей настоящей работы в решение поставленной задачи следующий.

Введение и решение задачи 4 (из раздела 2) написаны Цейтлер Р.К.,

часть «правдоподобный и доказательный методы рассуждений» из раздела 1 и решение задачи 1 (из раздела 2) – Мамаевой Е.В.,

часть «индукция и дедукция» из раздела 1 и решение задачи 2 (из раздела 2) – Аблязовым Т.Ф.,

заключение и решение задачи 3 (из раздела 2) – Плечунь А.В.

Научный руководитель – Ференчук И.И., как уже имеющая успешный опыт работы на рассматриваемую тему [7], консультировала исполнителей работы и предварительно редактировала работу.

Научный руководитель – профессор Гирлин С.К. поставил задачу исполнителям и осуществил окончательную редакцию написанного материала.

Апробация работы. Доказательства некоторых формул ИР-методом были доложены одним из соавторов настоящей работы (Цейтлер Р.К.) на международной студенческой научно-практической конференции «Студенческая практика – ключ к будущей профессии» (РФ, Республика Крым, г. Ялта, 9-10 ноября 2017 г.). Тезисы этого доклада приняты к печати.

Виды рассуждений: правдоподобный и доказательный методы рассуждений, индукция и дедукция

Существуют доказательные и правдоподобные рассуждения, которые друг друга дополняют. «В строгом рассуждении главное – отличать доказательство от догадки, обоснованное доказательство от необоснованной попытки. В правдоподобном рассуждении главное – отличать одну догадку от другой, более разумную догадку от менее разумной» [12, с. 15].

Как отмечает выдающийся американский математик и педагог Д. Пойа,

«1. Строго говоря, все наши знания за пределами математики и доказательной логики (которая фактически является ветвью математики) состоит из предположений. Конечно, существуют предположения и предположения. Есть в высшей степени достойные и надежные предположения, например, те, которые выражены в некоторых общих законах физики. Бывают другие предположения, не являющиеся ни надежными, ни достойными, и некоторые из них способны привести вас в ярость, когда вы прочитаете их в газете. И между теми и другими существуют всякого рода предположения, предчувствия и догадки.

Мы закрепляем свои математические знания доказательными рассуждениями, но подкрепляем свои предположения правдоподобными рассуждениями. Математическое доказательство является доказательным рассуждением, а индуктивные выводы физика, косвенные улики юриста, документальные выводы историка и статистические доводы экономиста относятся к правдоподобным рассуждениям.

Различие между этими двумя типами рассуждения велико и многообразно. Доказательное рассуждение надежно, неоспоримо и окончательно. Правдоподобное рассуждение рискованно, спорно и условно. Доказательные рассуждения пронизывают науки как раз в той же мере, что и математика, но сами по себе (как и сама по себе математика) не способны давать существенно новые знания об окружающем нас мире. Все новое, что мы узнаем о мире, связано с правдоподобными рассуждениями, являющимися единственным типом рассуждений, которыми мы интересуемся в повседневных делах. Доказательное рассуждение имеет жесткие стандарты, кодифицированные и выясненные логикой (формальной, или доказательной логикой), являющейся теорией доказательных рассуждений. Стандарты правдоподобных рассуждений текучи, и нет никакой теории таких рассуждений, которая могла бы по ясности сравниться с доказательной логикой или обладала бы сравнимой с ней согласованностью.

2. Заслуживает нашего внимания другой момент, касающийся этих двух типов рассуждения. Всякий знает, что математика предоставляет прекрасную возможность научиться доказательным рассуждениям, но я утверждаю также, что в обычных учебных планах учебных заведений нет предмета, который давал бы сравнимую возможность научиться правдоподобным рассуждениям. Я обращаюсь ко всем, кто обучается математике, элементарной или высшей, и заинтересован в овладении ею, и говорю: «Конечно, будем учиться доказывать, но будем также учиться догадываться».

Это звучит немного парадоксально, и я должен подчеркнуть несколько обстоятельств, чтобы избежать возможных недоразумений.

Математика рассматривается как доказательная наука. Однако это только одна из ее сторон. Законченная математика, изложенная в законченной форме, выглядит как чисто доказательная, состоящая только из доказательств. Но математика в процессе создания напоминает любые другие человеческие знания, находящиеся в процессе создания. Вы должны догадаться о математической теореме, прежде чем ее докажите; вы должны догадаться об идее доказательства, прежде чем проведете его в деталях. Вы должны сопоставлять наблюдения и следовать аналогиям; вы должны пробовать и снова пробовать. Результат творческой работы математика – доказательное рассуждение, доказательство; но доказательство открывается с помощью догадки. Если обучение математике в какой-то степени отражает то, как создается математика, то в нем должно найтись место для догадки, для правдоподобного умозаключения» [12, с. 14-15].

«Метод, с помощью которого ученый имеет дело с опытом, обычно называется индукцией» [12, с. 25]; «индукция – логическое умозаключение от частных, единичных случаев к общему выводу, от отдельных фактов к обобщениям» [13, с. 197]), «дедукция – способ рассуждения, при котором новое положение выводится чисто логическим путем от общих положений к частным выводам» [13, с. 109]. Общепринятое построение любой математической науки – дедуктивное. Однако «индуктивные методы изложения материала, при которых происходит последовательное обобщение понятий, представляются более благоприятствующими активному усвоению материала учащимися. Именно в этом смысле и понимается предпочтение индуктивного метода перед дедуктивным. Что же касается затраченного времени, то если считать не по числу лекционных часов, а по числу часов, затраченных учащимися на усвоение материала, то вряд ли оно окажется большим, чем при преподавании, основанном на дедуктивном методе. К сожалению, встречаются преподаватели математики, которые любят увлекаться формализмом, абстракциями, излагая при этом материал как нечто данное свыше, непонятно как придуманное кем-то. Это обычно дает большую экономию во времени при изложении материала, однако, как правило, совершенно неоправданно с точки зрения его активного усвоения» [10, с. 98-99]. Важность применения индуктивных рассуждений подчеркивал Д. Пойа: «Индукция изменила терминологию, выяснила понятия. Мы можем проиллюстрировать и эту сторону процесса, т.е. индуктивное выяснение понятий, подходящим небольшим математическим примером. Вот ситуация, не столь уж нечастая в математическом исследовании: теорема уже сформулирована, но мы должны придать более точный смысл терминам, в которых она сформулирована, чтобы сделать ее безукоризненно правильной. Это, как мы увидим, может быть удобно сделано с помощью индуктивного процесса» [12, с. 76].

Как известно, вначале любая математическая наука строится с помощью индуктивных рассуждений, а затем развивается с помощью дедукции и при «оборачивании метода» (по выражению К. Маркса) – индукции.

«Следуя [4-7] определим понятия «иллюстративное» и «репрезентативное» рассуждения.

«Иллюстративный метод математических рассуждений, как и индуктивный, является частным случаем правдоподобного рассуждения, и заключается в следующем. Утверждение (или его доказательство) для более наглядного изложения (и поиска формулировки нового утверждения или его доказательства) сопровождается иллюстрацией на примере выбранного частного случая (например, выбранных функций – представителей общего случая). Разумеется, эта иллюстрация не является составной частью строгого доказательства, для удобства эта иллюстрация может заключаться в двойные фигурные скобки.

Суть репрезентативного метода (ранее в [5] он назывался наглядным) заключается в том, что доказательное размышление или доказательство справедливости какого-либо свойства элементов из некоторого класса элементов проводится с использованием некоторых конкретно выбранных элементов (представителей) из рассматриваемого класса элементов. При этом свойствами выбранных элементов, не присущими всем элементам рассматриваемого класса, нельзя пользоваться. Это означает, например, что действия или операции над выбранными представителями не должны выполняться (так как результат выполнения присущ только выбранным представителям), а должны лишь указываться (то есть фактически должен указываться алгоритм, приводящий к решению задачи – требуемому доказательству). Так, если в качестве конкретного представителя действительного числа выбрано число, например, 3, то вычисление выражения $2\times3 + 5\times3$ допустимо и равно 7×3 (при замене представителя, например, на число 4, выражение будет иметь вид – 7×4), а последнее выражение, как и выражение, например, 3^2 не подлежит вычислению, а лишь указывается операция над представителем, т. к. при замене представителя на другое число результат вычисления 3^2 будет отличаться от 4^2.

Количество выбранных представителей определяется лишь поставленной целью использования репрезентативного размышления (доказательства): сделать размышление для нашей интуиции более понятным и наглядным, подкрепляя дедуктивное размышление индуктивным. Иллюстративный метод на примере представителей рассматриваемого класса математических объектов может позволить обнаружить некоторые новые свойства, характерные не для всех объектов класса, а только лишь для объектов из некоторого подкласса (или обнаружить более широкий класс объектов с рассматриваемым свойством). А это может помочь сформулировать и доказать новую теорему. Сочетание иллюстративного и репрезентативного методов будем называть иллюстративно-репрезентативным (ИР) методом или ИР-методом.

Студентами Гуманитарно-педагогической академии (филиал) Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского (в г. Ялте) под руководством профессора Гирлина С.К. было написан ряд статей, включающих доказательства с помощью ИР-методов теорем математического анализа и теории дифференциальных уравнений. Это, например, введение индуктивным способом и ИР-методом определений понятий дифференцируемости функции и связи с непрерывностью [4], доказательство формулы интегрирования по частям [1], теорема Римана о сумме условно сходящегося ряда с действительными членами [5], теорема о структуре общего решения линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения порядка выше первого [3], теоремы теории интегральных уравнений вольтерровского типа и математической теории развития [15] (новой науки, недавно созданной работами академика В.М. Глушкова (СССР), профессоров В.В. Иванова (США) и С.К. Гирлина (РФ)).

Вывод формул иллюстративно-репрезентативным методом (ИР-методом)

В учебнике профессора Кудрявцева Л.Д. по математическому анализу [11] «в основном изложение материала в курсе ведется индуктивным методом: по возможности все вводимые понятия изучаются сначала в простейших ситуациях и лишь после обстоятельного их рассмотрения и накопления достаточного числа конкретных примеров производятся дальнейшие обобщения» [11, с. 3].

В [4] были введены индуктивным методом (с помощью конкретных примеров заданных функций) или ИКР-методом понятия дифференцируемости и производной функции в точке. Однако этим методом можно не только вводить новые понятия, но и доказывать уже известные теоремы [1-3, 5, 6], а также искать и доказывать новые еще неизвестные теоремы [7].

Продемонстрируем преимущества доказательств некоторых формул ИР-методом.

Задача 1. Доказать АР-методом, КР-методом, ИР-методом формулу сокращенного умножения – разность квадратов двух действительных чисел равна произведению разности и суммы этих чисел:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \qquad (1)$$

где $a,\ b \in R = (-\infty, +\infty)$.

1. Докажем традиционным методом (АР-методом). В качестве представителей двух действительных чисел возьмем абстрактные символы (буквы, переменные) a и b. Преобразуем правую часть равенства (1), в результате получая правую часть равенства (1):

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Равенство (1) доказано АР-методом.

2. Докажем КР-методом. В качестве представителей двух действительных чисел возьмем числа 3 и 4. Имеем (напоминаем, что действия над выбранными представителями 3 и 4 не производятся, а только указываются):

$$(3-4)(3+4) = 3^2 + 3\times4 - 4\times3 - 4^2 = 3^2 - 4^2.$$

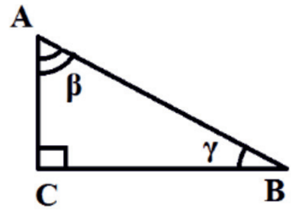
Равенство (1) строго доказано КР-методом (действительные числа 3 и 4 играют роль абстрактных символов или переменных a и b).

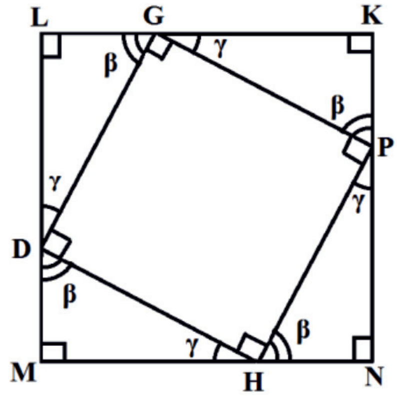
3. Доказательства ИАР-методом и ИКР-методом проводятся, сопровождая приведенные доказательства иллюстрацией (вычислениями) на примере заданных чисел, например 3 и 4.

Методы доказательств ИАР-методом или ИКР-методом будем называть ИР-методом.

Задача 2. Доказать ИКР-методом теорему Пифагора: квадрат длины большей стороны прямоугольного треугольника АСВ ($\angle C = 90^\circ$, $AB = c > AC = b$, $AB = c > BC = a$) равен сумме квадратов длин двух его других сторон: $c^2 = a^2 + b^2$.

Доказательство. Сделаем рисунок прямоугольного треугольника ACB (из контекста полагаем ясным, когда под обозначением AB подразумевается отрезок, а когда – длина этого отрезка). В качестве представителей действительных чисел a и b возьмем числа 4 и 3 соответственно, обозначив $\angle ABC = \gamma$, $\angle BAC = \beta$, очевидно, $\gamma + \beta = 90^\circ$. Нарисуем также квадрат $MNKL$ со стороной длины $MN = a + b = 4 + 3$, причем $MH = 4$, $HN = 3$, $H \in MN$, $NP = 4$, $PK = 3$, $P \in NK$, $KG = 4$, $GL = 3$, $G \in LK$, $LD = 4$, $DM = 3$, $D \in LM$.





Очевидно, все треугольники ACB, DMH, HNP, PKG, GLD равны между собой (по двум сторонам и углу между ними), а, значит, равны их площади, например, числу S, где $S = \frac{1}{2}\times4\times3$. Имеем

$$\angle DHP = \angle HPG = \angle PGD = \angle GDH =$$
$$= 180^\circ - (\gamma + \beta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

и

$$DH = HP = PG_1 = GD = c.$$

Следовательно, четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ – квадрат и его площадь, равная c^2, равна также разности площадей квадрата $MNKL$ и четырех треугольников DMH, HNP, PKG, GLD, т.е.

$$c^2 = S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{MNKL} - 4S =$$
$$= (4+3)^2 - 4\times\frac{1}{2}\times4\times3 =$$
$$= 4^2 + 2\times4\times3 + 3^2 - 2\times4\times3 = 4^2 + 3^2,$$

откуда $c^2 = 4^2 + 3^2$ и $c = \sqrt{4^2 + 3^2}$.

$$\{\{c^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25,$$
$$\text{откуда } c = \sqrt{25} = 5.\}\}$$

Теорема строго доказана ИКР-методом (текст доказательства совершенно не изменится, если в качестве абстрактных представителей действительных чисел a и b взять любые другие конкретные представители).

Задача 3. Доказать ИКР-методом, что для любых действительных чисел a и b

$$|a+b| \le |a|+|b| . \qquad (2)$$

Для доказательства рассмотрим всевозможные случаи задания чисел a, b, применяя определение модуля действительного числа.

По определению $|a| = \begin{cases} a, a \ge 0, \\ -a, a < 0. \end{cases}$

1. Пусть $\begin{cases} a \ge 0, \\ b \ge 0. \end{cases}$

Тогда в силу свойств неравенств $a+b \ge 0$. В качестве представителей класса таких чисел a и b возьмем конкретные числа: $a = 5$, $b = 3$

Имеем $|5+3| = 5+3 = |5|+|3|$,

$$\{\{\ |5+3| = |8| = 8, |5|+|3| = 5+3 = 8\ \}\},$$

откуда $|5+3| \le |5|+|3|$. Для случая 1 неравенство (2) строго доказано.

2. Пусть $\begin{cases} a+b \ge 0, \\ a \ge 0, \\ b < 0. \end{cases}$

В качестве представителей класса таких чисел a и b возьмем: $a = 5$, $b = -3$ (т.к. $a + b \ge 0$, $b < 0 \le a$, то $a \ge -b > 0$, т.е. $a > 0$).

Имеем

$$|5+(-3)| = 5+(-3) < 5,$$

$$\{\{\ |5+(-3)| = |2| = 2\ \}\}$$

$$|5|+|-3| = 5+(-(-3)) = 5+3 > 5.$$

$$\{\{\ |5+(-3)| = 5+(-3) = 2 < |5|+|-3| = 5+3 = 8\ \}\}$$

Следовательно, $|5+(-3)| < |5|+|-3|$, откуда $|5+(-3)| \le |5|+|-3|$.

Неравенство (2) для случая 2 доказано.

3. Пусть $\begin{cases} a+b \ge 0, \\ a < 0, \\ b \ge 0. \end{cases}$

Доказательство непосредственно следует из предыдущего случая, т.к. достаточно поменять слагаемые a и b местами (положив $a = -3$, $b = 5$):

$$|(-3)+5| = |5+(-3)| \le |5|+|-3| = |-3|+|5|.$$

Остальные три возможных случая доказываются аналогично. Выбранные в каждом из рассматриваемых случаях числа (представители класса действительных чисел) играют роль абстрактных символов – букв a и b, действия над которыми нельзя производить, а нужно только указывать.

Задача 4. Доказать (с применением ИКР-метода), что если многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, все коэффициенты которого целые числа, имеет корень $x = k$, где k – целое число и $k \ne 0$, то свободный член многочлена a_n делится без остатка на k.

Доказательство. {{Рассмотрим частный случай многочлена второй степени с целыми коэффициентами $P_2(x) = x^2 - 5x + 6$, для которого $x = 2$ и $x = 3$ – целые корни:

$$P_2(2) = 2^2 - 5\times 2 + 6 = 10 - 10 = 0,$$

$$P_2(3) = 3^2 - 5\times 3 + 6 = 15 - 15 = 0 .$$

При $x = 2$ имеем $2^2 - 5\times 2 + 6 = 0$, откуда

$$6 = -(2^2 - 5\times 2) = 2\times(-2+5)$$

и $\frac{6}{2} = -2+5 = 3$ – целое число, т.е. свободный член 6 делится на целый корень 2 нацело. При $x = 3$ имеем $3^2 - 5\times 3 + 6 = 0$, откуда

$$6 = -(3^2 - 5\times 3) = 3\times(-3+5)$$

и $\frac{6}{3} = -3+5 = 2$ – целое число, т.е. свободный член 6 делится на целый корень 3 нацело.

Рассмотренные частные случаи (которые можно рассматривать как доказательства требуемого утверждения КР-методом для любого многочлена второй степени и выбранных представителей: конкретного многочлена второй степени и конкретных корней – целых чисел) подсказывают доказательство АР-методом (традиционным) для общего случая}}.

Действительно, пусть $x = k$ – целый корень многочлена $P_n(x)$, $k \ne 0$ т.е.

$$P_n(k) = a_0k^n + a_1k^{n-1} + ... + a_{n-1}k + a_n = 0,$$

откуда

$$a_n = -(a_0k^n + a_1k^{n-1} + ... + a_{n-1}k) = \\ = k(-a_0k^{n-1} - a_1k^{n-2} - ... - a_{n-1})$$

и $\frac{a_n}{k} = -a_0k^{n-1} - a_1k^{n-2} - ... - a_{n-1}$ – целое число (как произведение и сумма целых чисел), т.е. свободный член многочлена a_n делится без остатка на k, что и требовалось доказать.

Замечание. Доказанная теорема может использоваться для поиска среди делителей свободного члена целых корней (если такие корни существуют) многочлена с целыми коэффициентами.

Заключение

В работе поставлены задачи и цель настоящего исследования, изучена и проанализирована научная литература с целью раскрытия понятий различных методов индуктивного, дедуктивного, правдоподобного и математического рассуждений, раскрыты сущность индуктивного, иллюстративного и репрезентативного рассуждения, приведены примеры простейших иллюстративно-репрезентативных доказательств, продемонстрировавших эффективность применения таких методов доказательств в элементарной и высшей математике.

Можно заметить, что до введения Виетом параметров (в 16 веке) не существовало общего метода решения любого квадратного уравнения. Но такой метод мог быть найден (еще во времена Древнего Вавилона и Египта) – и это конкретно-репрезентативный метод!

Ввиду особой важности предлагаемых методов обучения (в особенности – для самообучения), с точки зрения научных руководителей и авторов данной работы, ни один учебник математики для среднего и высшего образования не должен издаваться без описания ИР-методов рассуждений и хотя бы нескольких примеров их применения (при введении математических понятий, доказательстве уже известных теорем и поиске и доказательстве новых теорем).

Список литературы

1. Анишева М.О., Гирлин С.К. Доказательство формулы интегрирования по частям репрезентативным методом // Проблемы современного педагогического образования. Сер.: Педагогика и психология.- Сб. статей: Вып. 51, Ч. 1. – Ялта: ФГАОУ ВО КФУ им. Вернадского в г. Ялте, 2016. – С. 14-23.

2. Гирлин С.К. Математический анализ: Учебно-методическое пособие для студентов математических специальностей педагогических университетов / С.К. Гирлин. – Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2014. – 156 с.

3. Гирлин С.К. Дифференциальные уравнения. Изучим самостоятельно: учебное пособие для студентов математических специальностей / С.К. Гирлин – Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2014. – 72 с.

4. Гирлин С.К., Боева А.С. О новом методе обучения математике // Электронный мультидисциплинарный научный журнал с порталом международных научно-практических конференций «Интернетнаука». 2017. № 5.– С.35-46. ISSN 2414-0031. Доступно на: <https://internetnauka.ru/index.php/journal/article/view/415>. Дата доступа: 20 ноя. 2017.

5. Гирлин С.К., Кузнецов И.В. Наочні методи доведень теорем // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт: Труди міжнародної науково – методичної конференції «Математична освіта в Україні: минуле, сьогодення, майбутнє». – Вип. – 28. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2007. – С. 140 – 144 .

6. Гирлин С.К., Нечаева А.С. Иллюстративные рассуждения в доказательствах теорем математического анализа // II научная конференция профессорско-преподавательского состава, аспирантов, студентов и молодых ученых «Дни науки КФУ им. В.И. Вернадского» (Симферополь, 2016), сборник тезисов участников. Симферополь, 2016. Т.3. – С. 35-36.

7. Гирлин С.К., Ференчук И.И. Об аналогах дифференциальных теорем о среднем // Электронный мультидисциплинарный научный журнал с порталом международных научно-практических конференций «Интернетнаука». 2017. № 5.- С.35-46. ISSN 2414-0031. Доступно на: <https://www.internetnauka.ru/index.php/journal/article/view/455>. Дата доступа: 20 ноя. 2017.

8. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. Т.1. Арифметика. Алгебра. Анализ; Пер. с нем. / Под ред. В.Г. Болтянского. – 4-е изд. – М.: Наука. – 1987. – 432 с.

9. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа: В 2-х т.: Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функции одной переменной. Ряды: – Висагинас: «Alfa», 1998. – 400 с.

10. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и ее изучении. – М.: Наука. – 1977. – 112 с.

11. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Том 1: учебник для бакалавров / Л.Д. Кудрявцев. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2017. – 703 с.

12. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – 2-ое изд., испр. – М.: Наука, 1975.– 464 с.

13. Словарь иностранных слов.- 16-е изд., испр. – М.: Рус. яз., 1988. – 624 с.

14. Справочное пособие по математическому анализу, ч.1. Введение в анализ, производная, интеграл. / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай и др.. – Киев: Вища шк, 1978.- 696 с.

15. Girlin S.K., Ivanov V.V. Mathematical Theory of Development. A Course of Lectures: учебное пособие для студентов математических специальностей / С.К. Гирлин, В.В. Иванов. – Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2014. – 140 с.