ВОЙНА С ОДЗ

Северов О.С.

МАОУ « Лицей № 9», 9 «Б» класс

Научный руководитель: Шакирова Г.Г.,
учитель математики высш. к., МАОУ»Лицей № 9»

Данная статья является реферативным изложением основной работы. Полный текст научной работы, приложения, иллюстрации и иные дополнительные материалы доступны на сайте III Международного конкурса научно-исследовательских и творческих работ учащихся «Старт в науке» по ссылке: https://www.school-science.ru/0317/7/29329

Я считаю, что математика – это одна из важнейших наук в мире. Она приобретает особое значение для человека, в связи с ростом науки и технического прогресса. Всем людям в своей жизни приходилось выполнять достаточно сложные расчеты, пользоваться вычислительной техникой, находить и применять нужные формулы, владеть приемами геометрических измерений, но человек не всегда учитывает все условия, влияющие на результат. Именно благодаря этому и появляется условие ОДЗ.

Данная тема меня заинтересовала, тем, что я не до конца понял значение и важность нахождения ОДЗ, благодаря чему я не уделял должного внимания важности ОДЗ в некоторых заданиях, и у меня с ОДЗ возникла «война».

В то же время по математической сути нахождение ОДЗ вовсе не является обязательным, часто не нужным, а иногда и вообще невозможным – и все это без какого бы то ни было ущерба для решения. И из-за такой ситуации с ОДЗ и возникает «война».

При решении задач некоторых типов уравнений и неравенств, я столкнулся с тем, что некоторые условия либо не подходят, либо на них накладываются определенные значения и в дальнейшем я понял, что действительно существует определенная область, в которой расширяются допустимые значения, удовлетворяющие условию задач и уравнений некоторых типов.

Если привести грубое сравнение теннисного мячика и функции (неравенства, уравнения или задачи), то оболочка мячика и внешние условия – это наше ОДЗ, а то, как мячик отскакивает от пола – это решение функции (неравенства, уравнения или задачи). Тогда можно сказать, что если мы нарушим оболочку этого мячика (или, проще говоря, порвем его), то мячик перестанет так же хорошо отскакивать, как и раньше, то есть если мы нарушим ОДЗ, то решения не будет.

Актуальность моей темы заключается в том, что человек, при решении проблемы, не обращает внимания на мелкие условия. Так же можно привести аналогию с решением определенных заданий по математике, где не учитывается условие ОДЗ, а это влияет на результат решения. Таких заданий много во второй части ОГЭ, что может привести к неуспешной сдачи экзамена.

Цель:

Доказать важность ОДЗ.

Задачи:

1. Объяснить свойства и значения в нашей жизни ОДЗ.

2. Проанализировать различные методы решения примеров с участием ОДЗ.

Методы исследования:

– теоретическое исследование (анализ литературы, поиск источников);

– анализ основных задач и понятий ОДЗ;

– метод индукции ОДЗ (умозаключение от фактов к моей гипотезе)

– реальное исследование (решение заданий группой людей).

Практическая часть:

Проведение исследований по решению несложных задач и уравнений, описание исследований.

Гипотеза:

ОДЗ – это следствие возникновения различных условий в функциях, задачах, неравенствах и уравнениях.

История формирования

Что ж, давайте копнем в историю формирования ОДЗ.

Как и остальные понятия математики, понятие функции сложилось, конечно же, не сразу, а прошло долгий путь развития. В работе Пьера Ферма «Введение и изучение плоских и телесных мест» (опубликованной в 1679 году) сказано: «Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины, налицо имеется место». Как можно догадаться, здесь ведется речь о функциональной зависимости и ее графическом изображении («место» у Ферма означает линию). Изучение линий по их уравнениям в «Геометрии» Р. Декарта (1637) также указывает на ясное представление о взаимной зависимости между двумя переменными величины. Это свидетельствует уже о совершенно отчетливом владении понятием функции. В геометрическом и механическом виде это понятие мы находим и у И. Ньютона. Однако сам термин «функция» впервые появляется лишь в 1692 году у Г. Лейбница и притом не совсем в современном его понимании. Г. Лейбниц называет функцией различные отрезки, связанные с какой-либо кривой (например, абсциссы ее точек). В первом печатном курсе «Анализа бесконечно малых для познания кривых линий» Лопиталя (1696 года) термин «функция» не употребляется. Первое определение функции, близкое к современному, встречается у И. Бернулли (в 1718 году): «Функция – это величина, составленная из переменной и постоянной». В основе этого не вполне отчетливого определения лежит идея задания функции аналитической формулой.

В итоге я пришел к определению ОДЗ для функции. Областью определения (допустимых значений) функции Y называется совокупность значений независимой переменной X, при которых эта функция определена, т.е. область изменения независимой переменной (аргумента).

Уравнения и системы уравнений математики умели решать очень давно. В «Арифметике» греческого математика из Александрии Диофанта (III века) еще не было систематического изложения алгебры, однако в ней содержался ряд задач, решаемых с помощью составления уравнений. Есть в ней такая задача: «Найти два числа по их сумме 20 и произведению 96».

Чтобы обезопасить себя от решения квадратного уравнения общего вида, к которому приводит обозначение одного из чисел буквой, и которое тогда еще не умели решать, Диофант обозначал неизвестные числа $10 + x$ и $10 - x$ (в современной записи) и получал неполное квадратное уравнение $100 - x^2 = 96$, для которого подходил только положительный корень 2.

Задачи на квадратные уравнения встречаются в трудах индийских математиков уже с V века нашей эры.

Квадратные уравнения классифицируются в трактате «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы» Мухаммеда аль-Хорезми (787–850 года). В нем рассмотрены и решены (в геометрической форме) 6 видов квадратных уравнений, содержащих в обеих частях только члены с положительными коэффициентами. При этом рассматривались лишь положительные корни уравнений.

В самом известном российском учебнике «Арифметика» Леонтия Филипповича Магницкого (1669–1739 года) имелось немало задач на квадратные уравнения. Вот одна из них:

«Некий генерал хочет с 5000 человек баталию учинить, и чтобы та была в лице вдвое, нежели в стороне. Колик оная баталия будет иметь в лице и в стороне?», т.е. сколько солдат надо поставить по фронту и сколько им в затылок, чтобы число солдат по фронту было в 2 раза больше числа солдат, расположенных им «в затылок»?

В древневавилонских текстах (3000–2000 лет до нашей эры) встречаются и задачи, решаемые теперь с помощью систем уравнений, содержащих уравнения второй степени. Вот одна из них:

«Площади двух своих квадратов я сложил: $25\frac{5}{12}$. Сторона второго квадрата равна $\frac{2}{3}$ стороны первого и еще 5».

Соответствующая система в современной записи имеет вид:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25\frac{5}{12}, \\ y = \frac{2}{3}x + 5. \end{cases}$$

Данную задачу вавилонский автор решает правильно методом, который мы теперь называем методом подстановки, но он еще не пользовался алгебраической символикой.

И только в XVII веке после работ Декарта, Ньютона и других математиков решение квадратных уравнений приняло современный вид.

Вас, как мне кажется, интересует ответ на вопрос: «Для чего я написал историю возникновения функции и неравенств?» Ответ очень прост. ОДЗ – это лишь следствие возникновения различных условий в функциях, задачах, неравенствах и уравнениях.

ОДЗ в неравенствах и уравнениях

При решении дробно-рациональных уравнений и неравенств**:**

Знания с 1 по 9 класс не позволяют мне производить деление на 0. «На 0 делить нельзя, так как на пустоту что-либо поделить невозможно»,– говорили мне учителя в начальной школе.

Решение иррациональных уравнений и неравенств:

Уравнения	Неравенства
$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$ $\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x)^2 \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$	$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)\ge 0; \end{cases}$ $\sqrt{f(x)}\ge\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge g(x), \\ g(x)\ge 0; \end{cases}$ $\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)>g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)<0, \\ f(x)\ge 0; \end{cases} \end{array}\right.$ $\sqrt{f(x)}\ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)\ge g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)<0, \\ f(x)\ge 0; \end{cases} \end{array}\right.$ $\sqrt{f(x)}\le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le f(x)\le g^2(x), \\ g(x)\ge 0; \end{cases}$ $\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le f(x)<g^2(x), \\ g(x)>0; \end{cases}$

Исследование

Я провел исследовательскую работу для выяснения, как часто ученики учитывают ОДЗ при решении задач, уравнений, неравенств и т.д. Для этого я подобрал 4 задания и решил их сам, затем предложил их 35 девятиклассникам, в первых трех из которых не обязательно было учитывать ОДЗ, а в четвертом – обязательно. Целью исследовательской работы являлось доказательство того, что люди не уделяют должного внимания ОДЗ.

Задания, предложенные девятиклассникам:

1) Из пункта А в пункт Б выехал автобус со скоростью 60 км/ч. Через час вслед за ним в пункт Б выехал автомобиль, и через 4 часа догнал автобус в пункте Б (Приехали одновременно). Какая скорость у автомобиля?

2) $(x+3)^2+10=(x-2)^2$

3) $1/(x-2) = x-4$

4) $\sqrt{x-4}=\sqrt{2x+2}.$

При проверке данных заданий я обнаружил, что решения можно разделить по некоторым критериям.

Критерии отбора решений и количество входящих в них человек:

Справились со всеми заданиями – 5 человек; написали ОДЗ в 4 задании, но допустили ошибку в 1 задании – 2 человека, в 2 примерах – 8 человек, в 3 примерах – 3 человека; Не писали ОДЗ в 4 примере – 17 человек. Основные ошибки:

1. Забывают о своем ОДЗ (написали, но забыли учесть);
2. Неправильно составили ОДЗ;
3. Неправильно домножили уравнения;
4. Не используют подходящие формулы сокращенного умножения;
5. Путают знаки (*, +, -,:);
6. Делают не все примеры.
7. Забывают о смене знаков, при переносе через равно;

И я пришел к тому, что около половины учеников 9-х классов, к сожалению, не учитывали, либо неправильно записали ОДЗ в представленных заданиях, вследствие чего допустили ошибки.

Далее я буду отталкиваясь от исследования аргументировать свои утверждения.

Где встречается ОДЗ в реальной жизни

Мы, на самом деле, так часто встречаемся с условиями ОДЗ, что их просто не замечаем. Например, при покупке чего-либо; с определением действий, при различной температуре на улице.

Пример № 1 из исследования (задача) может быть моделью реальной ситуации, но слишком обобщенной (ни один автобус и ни одна машина не может все время ездить с постоянной скоростью из-за различных факторов, таких как качество асфальта на дороге, углы и количество поворотов, количество бензина и др.). Вот более подходящий пример:

Нам дали 200 рублей на корм коту, который стоит 18 рублей за пакетик, и буханку белого, по стоимости 24 рубля. Нужно рассчитать, сколько рублей мы потратим на корм. Возьмем за X – количество пакетиков с кормом.

$$ОДЗ: x \geq 0,$$
$$x = (200–24)/18,$$
$$x = 9 \text{ (остаток 14).}$$

Значит, мы купим 9 пакетиков корма с остатком равным 14 рублей, что соответствует нашему ОДЗ.

Необязательность ОДЗ

Как я убедился на собственном опыте, ОДЗ, зачастую, необязательно указывать в примерах, хотя именно указание ОДЗ требуют задания в ОГЭ и ЕГЭ, иначе получишь меньше баллов. Это можно увидеть на примере 1 и 2 заданий из исследования. И действительно, при решении этих номеров мы замечаем, что область допустимых значений можно не указывать, так как ее отсутствие никак не повлияет на ответ. Но очень часто в таких случаях хорошо сделанную работу оценивали на тройку.

Поиски ОДЗ являются, зачастую, просто лишней работой, без которой спокойно можно обойтись. Тут можно привести массу других примеров. Они хорошо известны, и поэтому я их опускаю. Главным способом решения являются равносильные преобразования при переходе от одного уравнения к другому, то есть к более простому.

Примеры-ловушки

Среди заданий, использующих уравнения или неравенства, есть задачи-ловушки (задания, в которых ОДЗ может сыграть над вами злую шутку). Известно, что в результате некоторых преобразований, изменяющих исходное ОДЗ, мы можем прийти к неверным решениям. Можно привести пример 3 и 4 заданий из исследовательской работы, но вот еще 1 пример таких уравнений:

$$\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=x^2+3.$$

Из ОДЗ имеем $x \geq 5$ (потому что подкоренное выражения не может быть отрицательным). Так как справа стоит положительное выражение, то $\sqrt{x-5}>\sqrt{2x-1}$, а значит, $x – 5 > 2x – 1$. Решая последнее неравенство, получим $x < –4$, что не входит в ОДЗ. Поэтому решения нет.

Заключение

Подводя некоторый итог всей исследовательской работе, я с уверенностью могу сказать, что некоторые условия ОДЗ для уравнений и неравенств – схожи. ОДЗ, как я доказал, встречается в реальной жизни, притом очень часто; также я показал то, что универсального ответа на вопрос «обязательно ли указывать ОДЗ во всех примерах?» в школьном курсе нет.

Также я доказал свою гипотезу, которая звучала так: «ОДЗ, в действительности,– это следствие возникновения различных условий в функциях, задачах, неравенствах и уравнениях».

Каждый раз, если хочешь понять, что делаешь, а не действовать механически, возникает вопрос: а какой способ решения лучше всего выбрать, в частности искать ОДЗ или не надо? Я полагаю, что в ходе своей работы частично ответил на этот вопрос.

Причина учета ОДЗ кажется очевидной, но люди все равно будут противиться тому, чтобы лишний раз записать ОДЗ. И сколько бы ни было различных презентаций, пояснений в учебниках и объяснений со стороны учителей, война, не смотря ни на что, еще не завершилась и даже не собирается завершаться, что и подтверждает актуальность и важность данной темы.

Но я бы хотел посоветовать всем, всегда учитывать ОДЗ, так как сразу сказать, что в какой-то определенной задаче нет подвоха, удается далеко не всегда.

Представленный мной доклад может использоваться не только учениками, но и педагогами для объяснения важности ОДЗ.

Список литературы

1. http://www.school.ioffe.ru/library/online/geometry/ryzhik/35000/35000_part3.pdf.:
2. Газета «Математика» № 46,15. 1998.
3. Газета «Математика» № 15. 2002.
4. Газета «Математика» № 17. 2002.
5. Ф.П. Яремчук, П.А. Рудченко Справочник «Алгебра и элементарные функции» Киев: «Наукова думка»; 1976.;
6. http://project.1september.ru/works/566862
7. Сборник по подготовке к ОГЭ. Типовые тестовые задания, 9 класс, издательство «ЭКЗАМЕН», Москва 2016.
8. Учебник по алгебре за 9 класс, А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев, издательство «МНЭМОЗИНА», Москва 2010.