СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Габов Н.А.

г. Лесосибирск, МБОУ «СОШ №9», 9 класс

Научный руководитель: Колотило Э.И., г. Лесосибирск, учитель математики высшей категории

Актуальность данного исследования определяется тем, что решение многих практических задач в области физики, техники и информационных технологий сводится к решению квадратных уравнений. В школьном курсе математики изучаются виды квадратных уравнений, способы их решения. Как правило, корни квадратного уравнения учащиеся находят с помощью формул корней квадратного уравнения или применяют теорему Виета и обратную ей теорему.

Проблема: отсутствие навыков решения квадратных уравнений различными способами у некоторых учащихся мешает им успешно подготовиться к итоговой аттестации по математике и математическим олимпиадам, дальнейшему обучению в профильном математическом классе.

Цель работы: изучение известных способов решения квадратных уравнений и выявление наиболее рациональных из них для практического применения.

Исходя из поставленной цели, в работе определены следующие **задачи:**

– изучить литературу и Интернет-ресурсы по данной теме;

– познакомиться с историческими фактами решения квадратных корней;

– описать различные способы решения квадратных уравнений и алгоритмы вычислений, сравнить степень сложности каждого из них;

– познакомить одноклассников со способами решения квадратных уравнений, которые не изучаются в школьной программе по математике.

Объект исследования – квадратные уравнения.

Предмет исследования – способы решения квадратных уравнений.

Гипотеза: кроме общеизвестных способов решения квадратных уравнений существуют другие способы решения, которые могут иметь практическое применение.

Методы исследования:

– библиографический метод (анализ литературы по теме исследования);

– метод классификации и метод качественного анализа.

Теоретическая значимость исследования состоит в систематизации способов решения квадратных уравнений и описании их алгоритмов.

Практическая значимость – предъявленный материал по данной теме и разработанная памятка «Способы решения квадратных уравнений» могут быть использованы для практического применения в учебном процессе.

Квадратное уравнение

Понятие квадратного уравнения

Определение 1. Квадратным уравнением называют уравнение вида

$ax^2 + bx + c = 0$, где коэффициенты a, b и c – любые действительные числа, причём, $a \neq 0$ [8, 143].

Многочлен $ax^2 + bx + c$ называют квадратным трёхчленом, где a – первый или старший коэффициент; b – второй или коэффициент при x, c – свободный член. Квадратное уравнение также называют уравнением второй степени, так как его левая часть есть многочлен второй степени.

Определение 2. Квадратное уравнение называют приведённым, если старший коэффициент равен 1; квадратное уравнение называют неприведённым, если старший коэффициент отличен от 1. $x^2 + px + q = 0$ – стандартный вид приведённого квадратного уравнения [8, 143].

Кроме приведенных и неприведённых квадратных уравнений различают также полные и неполные уравнения.

Полное квадратное уравнение – это квадратное уравнение, в котором присутствуют все три слагаемых; иными словами, это уравнение, у которого коэффициенты b и с отличны от нуля.

Неполное квадратное уравнение – это уравнение, в котором присутствуют не все три слагаемых; иными словами, это уравнение, у которого хотя бы один из коэффициентов b и с равен нулю.

Определение 3. Корнем квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называют значение переменной x, при котором квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ обращается в нуль. Такое значение переменной x называют также корнем квадратного трехчлена.

В ходе исследования было выявлено, что современной науке известно много различных способов решения квадратного уравнения, начиная с методов математиков далекой древности (метода Евклида – при помощи деления отрезка в среднем и крайнем отношениях) и заканчивая способами решения уравнений сложных степеней из разделов высшей математики.

Исторические сведения о квадратных уравнениях.

Из истории квадратных уравнений

Вавилоняне писали клинописными значками на глиняных табличках, которые в немалом количестве дошли до наших дней (более 500000, из них около 400 связаны с математикой). Поэтому мы имеем довольно полное представление о математических достижениях учёных Вавилонского государства. Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает по существу с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила.

В древней Греции квадратные уравнения решались с помощью геометрических построений. Методы, которые не связывались с геометрией, впервые приводит Диофант Александрийский в III в. н.э. В своих книгах «Арифметика» он приводит примеры решения неполных квадратных уравнений. Его книги с описанием способов решения до нашего времени не сохранились [4, 21].

Квадратные уравнения решали и в Индии. Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом тракте «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабахаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме: $ax^2 + bx = c$, $a > 0$. В уравнении коэффициенты, кроме коэффициента a, могут быть отрицательными. Правило Брахмагупта по существу совпадает с современным правилом [4, 23]. Общее правило решения квадратных уравнений было сформировано немецким математиком М. Штифелем (1487 – 1567). Выводом формулы общего решения квадратных уравнений занимался Виет [4, 25]. Он же и вывел формулы зависимости корней уравнения от коэффициентов в 1591 году. После трудов нидерландского математика А. Жирара (1595 – 1632), а также Декарта и Ньютона способ решения квадратных уравнений приобрел современный вид.

В работе описаны различные способы решения квадратных уравнений. Среди них способы, выходящие за рамки школьной программы – способ, основанный на свойствах коэффициентов квадратного уравнения, решение уравнений способом «переброски», с помощью циркуля и линейки, а также с использованием номограммы и геометрический метод.

Способы решения квадратного уравнения

Разложение квадратного трехчлена уравнения на множители

С этим способом мы познакомились в школьном курсе алгебры 8 класса. Он основан на «способе группировки» при разложении многочленов на множители и позволяет достаточно быстро решать квадратное уравнение.

Вывод: способ не сложный и понятный, им может пользоваться любой учащийся.

Выделение полного квадрата

Решение квадратных уравнений выделением квадрата двучлена опирается на применение формулы сокращенного умножения: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a–b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Вывод: способ выделения полного квадрата требует знания формул сокращенного умножения и хороших вычислительных навыков (в случае, если коэффициенты рациональные числа).

Применение формул корней квадратного уравнения

Используя выделение полного квадрата для квадратного трехчлена уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ мы получим формулы, с помощью которых найдем корни уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Формула позволяет найти корни любого квадратного уравнения, в том числе приведенного и неполного. При этом необходимо учитывать число корней в зависимости от дискриминанта $D = b^2 – 4ac$, $D > 0$, два разных корня; $D = 0$, один корень; $D < 0$, нет корней.

Известно, что кроме основной формулы корней квадратного уравнения существует формула, которая применяется при решении квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом, то есть $b = 2k$.

Решение уравнений с использованием теорем Виета

Любопытные соотношения между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами впервые обнаружил французский математик Франсуа Виет (1540 – 1603), которые он описал в своей знаменитой теореме и обратной ей [4, 180]. Если x_1 и x_2 – корни уравнения, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (теорема Виета).

Для приведенного квадратного уравнения вида $x^2 + px + q = 0$. Эти соотношения имеют вид: $x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q$. По коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней: а) если сводный член q приведенного уравнения положителен ($q > 0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависти от второго коэффициента p. Если $p > 0$, то оба корня отрицательны, если $p < 0$, то оба корня положительны;

б) если свободный член q уравнения отрицателен ($q < 0$), то уравнение имеет два различных по знаку корня, причем больший по модулю корень будет положителен, если $p < 0$, отрицателен, если $p > 0$.

Мы пришли к выводу, что рассмотренные выше способы решения уравнений имеют практическое применение только при твёрдом знании формул корней и теорем Виета. Немаловажную роль играют также хорошие вычислительные навыки учащихся.

Графическое решение квадратного уравнения

Если в уравнении $ax^2 + bx + c = 0$, из левой части перенести второй и третий члены многочлена в правую часть, то получим: $ax^2 = -(bx + c)$. Рассмотрим две функции: $y = ax^2$ и $y = -(bx + c)$. График первой зависимости – парабола, проходящая через начало координат. График второй зависимости – прямая. Возможны следующие случаи взаимного расположения графиков функций: пересечение двух графиков, два графика касаются, два графика не имеют общих точек.

Рассмотрим три случая решений квадратных уравнений:

а) решим графически уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$, (рис. 1, а). *Ответ:* $x_1 = -1$; $x_2 = 4$.

б) уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$, (рис. 1, б). *Ответ:* $x = 1$.

в) уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$, (рис. 1, в). Ответ: *корней нет.*

Вывод: если строить параболу по точкам, то требуется много времени, и при этом степень точности получаемых результатов невелика.

Способ, основанный на свойствах коэффициентов квадратного уравнения

1^0. Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.

2^0. Если $a - b + c = 0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$;

3^0. Рассмотрим уравнение вида

$$ax^2 + (a^2 + 1)x + a = 0; \ a \neq 0$$

и найдем его корни

$$D = a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2 = a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2 - 1)^2,$$

$$x_{1,2} = \frac{-(a^2+1) \pm \sqrt{(a^2-1)^2}}{2a} = \frac{-(a^2+1) \pm |a^2-1|}{2a}.$$

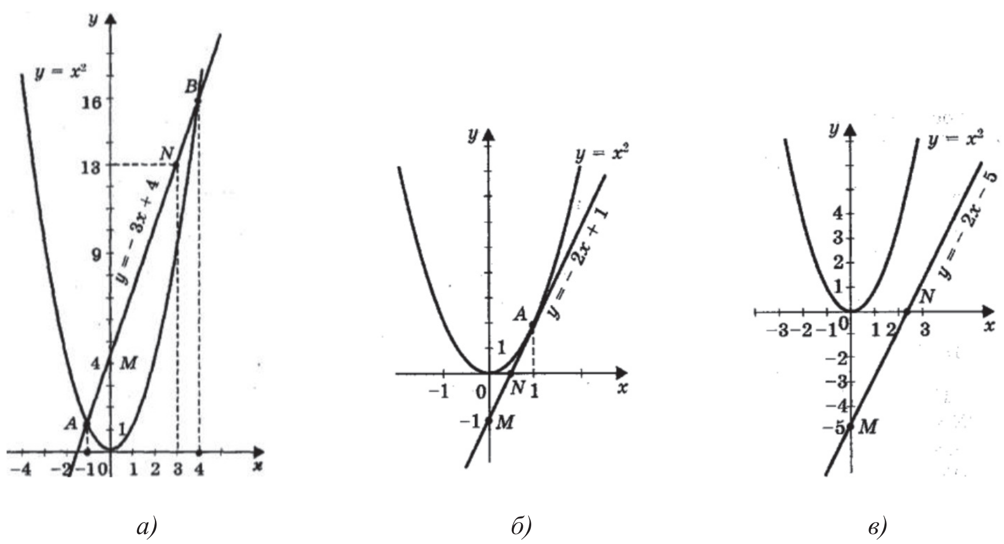


Рис. 1. Графическое решение квадратного уравнения

Не нарушая общности можно считать, что перед нами квадратное уравнение с целыми коэффициентами (даже если бы коэффициенты были дробными, уравнение можно было бы свести к уравнению с целыми коэффициентами), т.е. если $a \in Z$ и тогда $a^2 - 1 > 0$, а значит

$$x_1 = \frac{-a^2 - 1 + a^2 - 1}{2a} = -\frac{2}{2a} = -\frac{1}{a};$$

$$x_2 = \frac{-a^2 - 1 - a^2 + 1}{2a} = \frac{-2a^2}{2a} = -a.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{a}$; $x_2 = -a$.

Исследуя взаимосвязь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, мы заметили, что существуют квадратные уравнения, корни которых можно найти благодаря пониманию описанных гипотез.

Способ «переброски» первого коэффициента

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Домножим обе его части на a, получаем уравнение $a^2x^2 + abx + ac = 0$. Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$. Уравнение $y^2 + by + ac = 0$ равносильно данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета. Окончательно получаем $x_2 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$. При этом способе коэффициент a умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют способом «переброски».

Вывод: способ «переброски» привлекает своеобразным подходом в описании алгоритма решения уравнения. Вместе с тем данный способ вызывает затруднения в его понимании.

Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Это старый и незаслуженно забытый способ решения квадратных уравнений, о котором рассказывается в Таблице XXII Четырехзначных математических таблиц, автор В.М. Брадис. Номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения $z^2 + pz + q = 0$, по его коэффициентам определить корни уравнения [2, 83].

Алгоритм решения и практическая часть решения уравнений описаны ниже.

Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Номограмма (от греческого «nomos» – закон и …грамма), графическое представление функции от нескольких переменных, позволяющее с помощью простых геометрических операций (например, прикладывание линейки) исследовать функциональные зависимости без вычислений. Например, решать квадратное уравнение без применения формул.

Рассмотрим уравнение $z^2 + pz + q = 0$.

Криволинейная шкала номограммы построена по формуле $OB = \frac{a}{1+z}$, $AB = \frac{-z^2}{1+z}$.

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$, из подобия треугольников CAH и CDF получим пропорцию $\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB}$. После подстановок и упрощений вытекает уравнение $z^2 + pz = q = 0$, причем буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы (рис. 2).

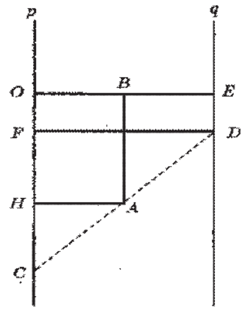


Рис. 2

Примеры:

1) Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ номограмма дает корни $z_1 = 8$ и $z_2 = 1$.

2) Решим с уравнение $2z^2 - 9z + 2 = 0$. Разделим коэффициенты этого уравнения на 2, получим уравнение $z^2 - 4{,}5z + 1 = 0$. Номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0{,}5$ (рис. 3).

3) Для уравнения $x^2 + 5x - 6 = 0$ номограмма даёт только положительный корень $x_1 = 1$, а отрицательный находим так: $x_2 = -b - x_1 = -5-1 = -6$.

4) Для уравнения $x^2 - 2x - 8 = 0$, $x_1 = 4$, а $x_2 = -b - x_1 = 2 - 4 = -2$.

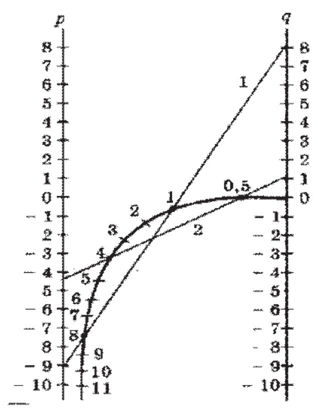


Рис. 3

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Решим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с помощью циркуля и линейки (рис. 4). Допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках $B(x_1;\ 0)$ и $D(x_2;\ 0)$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, и проходит через точки $A(0;\ 1)$ и $C(0; c/a)$ на оси ординат. По теореме о секущих имеем $OB \cdot OD = OA \cdot OC$, отсюда $OC = OB \cdot OD/OA = x_1 \cdot x_2/1 = c/a$. Центр окружности находится в точке пересечения перпендикуляров SF и SK, восстановленных в серединах хорд AC и BD, $SK = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-\dfrac{b}{a}}{2} = -\dfrac{b}{2a}$,

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \dfrac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a} \text{ [10, 34].}$$

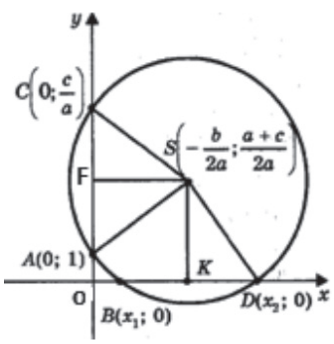


Рис. 4

Итак:

1) построим точки $S\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{a+c}{2a}\right)$ (центр окружности) и $A(0;\ 1)$;

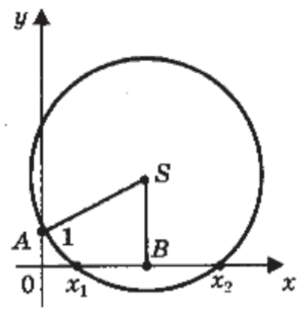
2) проведем окружность радиусом SA;

3) абсциссы точек пересечения этой окружности с осью ox являются корнями исходного квадратного уравнения. При этом возможны три случая:

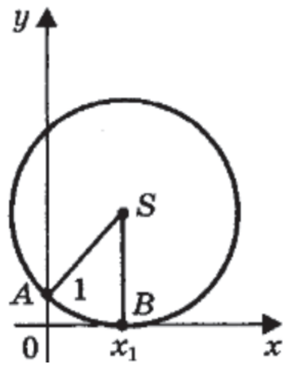
а) два решения (рис. 5, а);

б) одно решение (рис. 5, б);

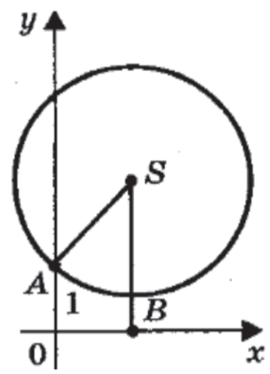
в) нет решений (рис. 5, в).



а)



б)



в)

Рис. 5

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

1. Построим точки $S\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{a+c}{2a}\right)$ (центр окружности) и $A(0;\ 1)$;

2) проведем окружность с радиусом SA;

3) абсциссы точек пересечения этой окружности с осью ox являются корнями исходного квадратного уравнения (рис. 6). При этом возможны три случая.

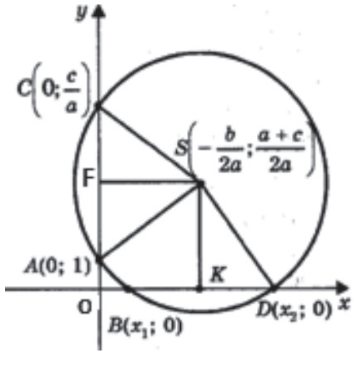
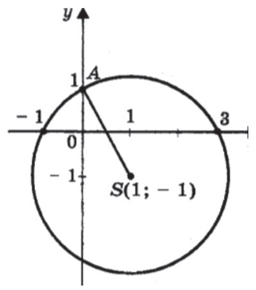
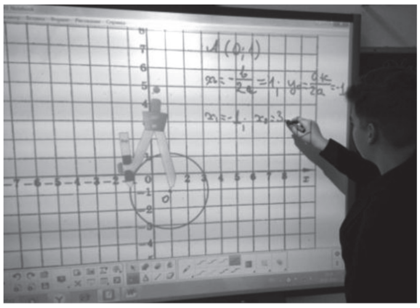
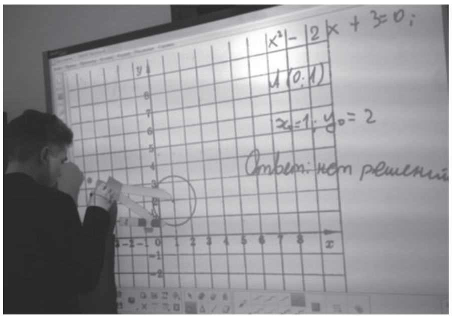


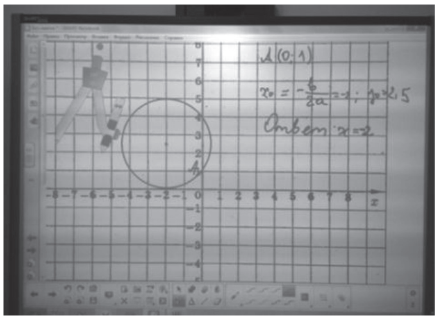
Рис. 6





а) *б)* *в)*





г) *д)*

Рис. 7

Пример 1. Решим уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$ (рис. 7, а).

Определим координаты точки центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot 1} = 1 \text{ и } y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1-3}{2\cdot 1} = -1.$$

Проведем окружность радиуса SA, где A (0; 1).

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$, уравнение имеет два решения.

Пример 2. Решим уравнение $x^2 + 4x + 4 = 0$ (рис. 7, г).

Определим координаты точки центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2 \text{ и } y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1+4}{2\cdot 1} = 2{,}5.$$

Проведем окружность радиуса SA, где A (0;1).

Ответ: $x_1 = -2, y$ равнение имеет одно решение.

Пример 3. Решим уравнение $x^2 - 2x + 3 = 0$ (рис. 7, д).

Определим координаты точки центра окружности по формулам:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot 1} = 1 \text{ и } y = \frac{a+c}{2a} = \frac{1+3}{2\cdot 1} = 2.$$

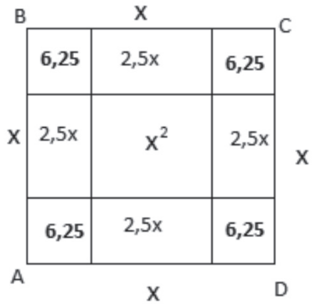
Проведем окружность радиуса SA, где A (0; 1).

Ответ: уравнение не имеет решения.

Вывод: очевидно, что этот красивый способ практически не применяется из-за геометрических построений и последующей проверки результатов решения.

Геометрический способ решения квадратных уравнений

В древности, когда геометрия была более развита, чем алгебра, квадратные уравнения решали не алгебраически, а геометрически. Вот пример из «Алгебры» ал – Хорезми: $x^2 + 10x = 39$. На сторонах квадрата со стороной x строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна 2,5. Площадь каждого прямоугольника равна $2{,}5x$. Полученную фигуру дополняют до нового квадрата, достраивая в углах четыре равных квадрата, сторона каждого из них равна 2,5, а площадь 6,25. Площадь квадрата можно представить как сумму площадей: первоначального x^2, четырёх прямоугольников $\left(4\cdot 2\frac{1}{2}\cdot x = 10x\right)$, т.е. $S = x^2 + 10x + 25$.



Из геометрического метода нахождения квадратных корней вытекает любопытнейший способ решения уравнений, основанный на выполнении различных действий с отрезками и позаимствованный из книги «Геометрия» великого французского ученого Рене Декарта (1596-1650).

Геометрический способ решения квадратного уравнения

Пусть надо решить, уравнение $x^2 + 10x + 9 = 0$. Выполним следующее построение.

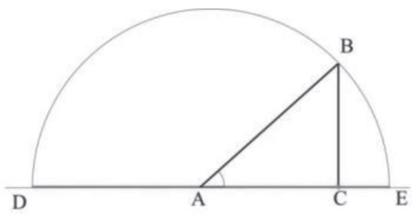


Рис. 8

Сначала по катету и гипотенузе ВС = $\sqrt{q}=\sqrt{9}=3, AB=\frac{p}{2}=\frac{10}{2}=5$, построим прямоугольный треугольник. Заметим, что $AC=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=4$. Радиусом, равным $\frac{P}{2}=5$ проведем окружность с центром в точке А. Она пересечет продолжение катета АС в двух точках, которые обозначим D и E. Отрезок DC составлен из $AC=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=4$ и, $AD=\frac{p}{2}=5$, т.е. $DC=9=x_1$. Отрезок ж СЕ есть разность отрезков $AE=\frac{p}{2}=5$ и $AC=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=4$, т.е. отрезок $CE=1=x_2$. Отрезок ВС есть корень квадратный из q, произведения отрезков x_1 и x_2.

Результаты исследования и их обсуждение

В ходе исследовательской работы был проведен опрос на предмет применения различных способов решения квадратного уравнения, которыми владеют одноклассники и учащиеся девятых классов МБОУ «СОШ № 9». С этой целью учащимся было предложено решить квадратные уравнения. Результаты проверки показали, что большая часть опрошенных находили корни уравнения с помощью: общей формулы корней. Таких учащихся – 82%. С помощью теоремы Виета корни уравнения нашли – 6% учащихся, а другими способами –12% .

Демонстрация результатов исследовательской работы, т.е. способов решения уравнений, не изучаемых в школьной программе по математике, заинтересовала учащихся, а их практическое применение выявило недостатки и преимущества каждого из способов.

Была дана характеристика алгоритмов решения по таким критериям, как трудоёмкость и точность вычислений, а также насколько удобен тот или другой метод, математически красив и практичен. По результатам практической работы каждый из участников эксперимента выставил условную отметку, и было установлено, что наиболее сложными для школьников оказались следующие способы: разложение левой части уравнения на множители, метод выделения полного квадрата. Наиболее доступными для учащихся в понимании алгоритмов решения были способы: решение квадратных уравнений по формуле корней и решение уравнений с использованием теорем Виета (для уравнений приведенного вида), применение свойств коэффициентов квадратного уравнения.

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки, геометрический способ решения квадратных уравнений вызвали интерес со стороны одноклассников, но необходимо отметить, что широкого практического применения они не имеют.

Очень необычными способами оказались: решение уравнений с помощью номограммы и решение уравнений способом «переброски».

Заключение

Изучив учебную и научную литературу, Интернет-ресурсы в молодежных образовательных форумах по теме: «Способы решения квадратных уравнений» мы выяснили, что современной науке известно много способов решения квадратных уравнений. Следует отметить, что некоторая часть изученных способов не входит в школьный курс, так как относится к разделу прикладной математики. В ходе работы было отмечено, что не все способы удобны для решения, но каждый из них уникален.

Мы считаем, что смогли выполнить поставленную перед собой цель работы, так как:

1) изучили, описали алгоритмы вычислений и проверили на практике 10 способов решения квадратных уравнений, (всего было найдено 11);

2) представили результаты исследования одноклассникам с целью знакомства со способами решения квадратных уравнений и выявления на их взгляд наиболее эффективного способа.

Итогом нашей работы является образовательный продукт – создана памятка по теме: «Способы решения квадратного уравнения».

Практическая значимость данной работы заключается, в возможности использования результатов исследования в практике организации самостоятельной работы учащихся при решении уравнений на уроках, факультативных занятиях и экзаменах в формате ОГЭ по математике.

Список литературы

1. Баранова Е.А. Как увлечь школьников исследовательской деятельностью. Математика в школе / Е.А. Баранова, М.И. Зайкин. – 2004. – № 2 – 80 с.

2. Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы: Для сред. шк. – 15-е издание, стереотип. – М.: Дрофа, 2012. – 93 с.

3. Виленкин Н.Я. За страницами учебника математика: геометрия, старинные и занимательные задачи; пособие для учащихся 10-11 кл. / Н.Я. Виленкин, Л.П. Шибасов, З.Ф. Шибасова. – М.: Просвещение, 2008. – 175 с.

4. Глейзер Г.И. История математики в школе. 7-8 классы. – М.: Просвещение, 1982.

5. Дробышев Ю.А. Изучение квадратных уравнений на основе историко – генетического метода / Ю.А. Дробышев // Математика в школе. – 2011. – № 6.

6. Литвинова С.А., и др. За страницами учебника математики 8-11 классы. – 2-е изд., дополненное – М.: Глобус, Волгоград: Панорама,2008. – С. 76-82.

7. Макарычев Ю.Н. Алгебра: учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; Под редакцией С.А. Теляковского. – 11-е издание – М.: Просвещение, 2003. – 238 с.

8. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович. – 11-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 224 с.: ил.

9. Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры. Книга для учащихся 7-9 классов средней школы [Текст] / Л.Ф. Пичурин – Москва: Просвещение, 1990.

10. Пресман А.А. Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки / А.А. Пресман // Квант. – 1972. – № 4; http://www.wikipedia.org/

11. http://arm-math.rkc-74.ru/DswMedia/resheniekvadratnyixuravneniyrazlichnyimisposobami.doc.

12. http://edu.of.ru/attach/17/76716.doc.